NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.

00052076

THE
ASIATIC SOCIETY OF BOMBAY
Town Hall, Bombay.

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 09 July, 2016

Liber Bibliothecæ Mathem. Jac. Skene 179

JACOBI BERNOULLI,

Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruſſ. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè ſcripta

DE LUDO PILÆ RETICULARIS.

52076

GX · C · 31



LIBRARY OF THE BOMBAY BRANCH OF THE ASIATIC SOCIETY

BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc XIII.

00052076

NICOLAUS BERNOULLI
L. S.

PRodit nunc tandem diu deſideratus Patrui mei de Arte Conjectandi Tractatus poſthumus curâ Thurniſiorum Fratrum, qui rem gratam publico facturi Manuſcriptum Auctoris ab heredibus defuncti comparatum ſuis ſumtibus imprimi curaverunt. Propoſitum fuit Auctori monſtrare eximium uſum quem in vita civili habet ea Matheſeos pars, à paucis hactenus tractata, quæ de probabilitatibus dimetiendis agit. Qua ratione & quouſque Auctor hoc ſuum propoſitum executus fuerit jam recenſitum eſt in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum Gallicæ Anni 1705. & in Ephemeridibus Eruditorum Pariſienſibus Anni 1706. Diviſit Auctor Opus iſtud in quatuor Partes, quarum I^{ma} continet Illuſtris Hugenii Diatribam de Ratiociniis in Aleæ Ludo cum Annotationibus, quam Tractatui ſuo tanquam prima Artis Conjectandi elementa præmittendam eſſe judicavit. II^{da} Pars complectitur Doctrinam de Permutationibus & Combinationibus ad dimetiendas probabilitates ſummopere neceſſariam, cujus Uſum Parte III^{tia} in variis Sortitionibus & Ludis Aleæ explicuit. IV^{tam} Partem qua uſum & applicationem præcedentium ad res civiles, morales & œconomicas oſtendere voluit, adverſa diu uſus valetudine tandemque ipſa morte præventus imperfectam reliquit. Optaſſent quidem Editores, ut Defuncti Frater, qui unice abſolvendo huic operi maxime idoneus fuiſſet, defectum ſuppleviſſet; ſed ipſi plurimis aliis diſtricto negotiis operæ hujus demandatione noluerunt eſſe moleſti. Mihi quoque, quem olim Specimina quædam hujus Artis ad Jus applicatæ in Diſſertatione Inaugurali dediſſe noverant, id negotii deferre in animo habebant, quod vero abſens & in

peregrinatione conſtitutus ſuſcipere non poteram. Reverſus in Patriam denuoque rogatus operam hanc declinavi, cum juvenem me longoque rerum uſu & experientia ad materiam hanc tractandam neceſſaria haud inſtructum negotio huic imparem fore ſentirem, facileque judicarem, non tantum Lectori non ſatisfactum, ſed etiam reliquis pretium ademtum iri, ſi vulgaria duntaxat & trita afferrem. Suaſor itaque fui, ut Tractatus iſte qui maxima ex parte jam impreſſus erat, in eodem quo eum Auctor reliquit ſtatu cum publico communicaretur. Ne vero res utiliſſima, applicatio ſcilicet calculi probabilitatum ad œconomica & politica, plane negligatur, rogamus Nobiliſſ. D. Auctorem Libri Gallici *Eſſai d'Analyſe ſur les Jeux de Hazard*; Clariſſ. item Moyvræum, quorum uterque egregia hujus Artis Specimina non ita pridem publicavit, ut ipſi negotium hoc in ſe ſuſcipere, eximiaque ſua inventa cum publico ſuo tempore communicare dignentur. Speramus interim generalia illa, quæ Auctor quinque poſtremæ Partis capitibus tradit, Lectori induſtrio in ſpecialium quæſtionum enodatione non contemnendo uſui fore. Hæc de ipſo Tractatu præfanda eſſe cenſuimus. Adjunctæ ſunt ab Editoribus Poſitiones Auctoris de Seriebus Infinitis, quinque Diſputationibus olim ab ipſo pertractatæ, quarum cum exemplaria multa hactenus fruſtra apud Bibliopolas noſtros quæſita fuerint, illas ſimul impreſſas Tractatui iſti ſubjecerunt. Accedit quoque ob cognatam materiam Epiſtola Auctoris Gallica cui titulus: *Lettre à un Amy, &c.* Illud etiam monendum eſt Typum variationum Verſus Bauhuſiani, *Tot tibi* &c. inter ſchedas Auctoris repertum à Correctore in gratiam Curioſorum inſertum fuiſſe, adeoque poſtrema verba paginæ 78. omittenda eſſe. Reliquos errores, paucos quidem, à Correctore non obſervatos in calce Libri notavimus, quos ut Lector benevolus corrigat, precamur.

LETTRE
à un Amy,
ſur
les Parties du Jeu de Paume.

VOus me marquiez, Monſieur, que vous avez vû une de mes Theſes, où j'avance quelques Propoſitions nouvelles, touchant les Parties du Jeu de Paume; & vous me demandez, ſi ces Propoſitions renferment quelque realité qui puiſſe être démontrée, ou ſi elles ne ſont fondées que ſur de pures conjectures faites en l'air, & qui n'ont rien de ſolide; ne pouvant pas concevoir, à ce que vous dites, que l'on puiſſe meſurer les forces des joüeurs par nombres, & encore moins en tirer toutes les concluſions, que j'en ay tirées. Ce qui m'oblige de mettre par écrit tout ce que j'ay medité ſur cette matiere, & d'en faire le ſujet de cette Lettre, que je vous écris en François, pour ne vous pas rebuter dans ſa lecture par la traduction des termes qui ſont en uſage parmy les joüeurs, & qui deviendroient peu intelligibles, ſi on les mettoit en une autre Langue. Je ne m'arrête pas à vous y expliquer les Regles du Jeu, ni le principe de l'Art de conjecturer, qui doit ſervir de fondement à nôtre recherche, ſachant que l'un & l'autre

vou-

vous ſont parfaitement connus. Mais au reſte j'entre dans le détail de toutes les particularités de mon ſujet, ſans craindre le reproche, que l'on me pourroit faire de vous entretenir trop ſur une bagatelle; car vous ſavez, que ce noble Jeu a toujours fait le divertiſſement des perſonnes de la premiere qualité, & bientôt vous verrez, que s'il eſt utile pour l'exercice du corps, il eſt tres-capable & tres-digne auſſi de fixer les meditations de l'eſprit.

Je vous feray remarquer avant toutes choſes, que la raiſon, pour laquelle dans les jeux de hazard on peut ſupputer exactement les avantages & les deſavantages des Joüeurs, c'eſt parce que le plus ſouvant l'on connoit au juſte le nombre des cas, qui leur ſont favorables ou contraires: & je dois vous dire, qu'il n'en eſt pas de même des jeux, qui dépendent uniquement, ou en partie, du genie, de l'induſtrie ou de l'adreſſe des joüeurs, tels que ſont les jeux de la paume, des échecs, & la pluſpart des jeux de cartes; étant bien viſible, que l'on ne ſauroit déterminer par les cauſes, ou *à priori*, comme l'on parle, de combien un homme eſt plus ſavant, plus adroit ou plus habile qu'un autre, ſans avoir une parfaite connoiſſance de la nature de l'ame, & de la diſpoſition des organes du corps humain, laquelle mille cauſes occultes, qui y concourent, rendent abſolument impoſſible. Mais cela n'empêche pas, qu'on ne puiſſe le ſçavoir preſque auſſi certainement, *à poſteriori*, par l'obſervation de l'événement pluſieurs fois reïterée, en faiſant ce qui ſe peut pratiquer dans les jeux même de pur hazard, lors qu'on ne ſçait pas le nombre des cas, qui peuvent arriver. Poſons, qu'il y ait dans un ſac quantité de billets en partie blancs & en partie noirs, & que je ne ſache pas le nombre des uns ni des autres; que ferois-je pour le découvrir? je les tirerois l'un aprés l'autre, (en remettant chaque fois dans le ſac le billet, que j'en aurois tiré, avant que de prendre le ſuivant, afin que le nombre des billets du ſac ne diminüât point) & ſi j'obſervois cent fois que j'en tirâſſe un noir, & deux cent fois, que j'en tirâſſe un blanc, je ne héſiterois pas à conclure, que le nombre des blancs ne fût environ le double de celuy des noirs; car il eſt tres-ſur, que plus je ferois de ces obſervations en tirant, plus je pourrois eſpérer d'approcher de la veritable raiſon, qui ſe trouve

entre

entre les nombres des ces deux ſortes de billets; étant même une choſe démontrée, qu'on en peut tant faire, qu'il ſera à la fin probable de toute probabilité donnée, & par conſéquent qu'il ſera moralement certain, que la raiſon d'entre ces nombres, que l'on aura ainſi trouvée par expérience, difére de la veritable d'auſſi peu que l'on voudra: qui eſt tout ce qu'on peut ſouhaiter. C'eſt auſſi de cette maniere, que dans les jeux d'art & d'adreſſe on peut connoître de combien un jouëur eſt plus fort que l'autre jouëur. Je vois par exemple deux hommes, qui jouënt à la paume: je les obſerve long temps, & je remarque, que l'un d'eux gagne 200 ou 300 coups, pendant que l'autre n'en gagne que cent: je juge par là, avec aſſez de certitude, que le premier eſt deux ou trois fois meilleur jouëur que l'autre, ayant pour ainſi dire deux ou trois parties d'adreſſe, comme autant de cas ou de cauſes qui luy font gagner la bale, là où l'autre n'en a qu'une.

I. Cecy étant compris, mettons, pour entrer en matiere, deux jouëurs égaux A & B (c'eſt à dire, à qui nous ayons vû gagner & perdre un pareil nombre de coups) qui ſoient prémiérement à deux, ou trentains, ou quinzains, ou à but. Il eſt évident, qu'ils ont tous deux une égale eſperance de faire les coups qui leur manquent, & de gagner ainſi le jeu; c'eſt pourquoy le ſort de chacun eſt eſtimé $\frac{1}{2}$ J ou $\frac{1}{2}$ Jeu. Mettons enſuite, qu'A ait 30 & B 45, ou (ce qui revient à un) que celuy-cy ait l'avantage: vous voyez, qu'il eſt bien autant probable, qu'A gagnera ou perdra le coup ſuivant; mais s'il le gagne, ils redeviendront à deux & chacun aura, comme j'ay dit, $\frac{1}{2}$ J; & s'il le perd, il perdra auſſi le jeu; c'eſt ce qui luy vaut, par la Doctrine que vous ſçavez, $\frac{1.^{1:2} + 1.^{0}}{2} \infty \frac{1}{4}$J. Mettons encore, que A ait 15 à 45; il eſt clair auſſi, qu'il luy eſt également poſſible, de gagner 30 à 45, & d'avoir ainsi le ſort précédent $\frac{1}{4}$ J, ou de perdre le jeu (ſelon qu'il gagne ou perd le prémier coup) c'eſt-ce qui rend maintenant ſon ſort $\frac{1.^{1:4} + 1.^{0}}{2} \infty \frac{1}{8}$ J. Que si A avoit 15 à 30, un cas le rendroit trentain & un autre 15 à 45, (dont celuy-là luy amene $\frac{1}{2}$ J, & celuy-cy $\frac{1}{8}$ J) ce qui luy vaudroit alors $\frac{1.^{1:2} + 1.^{1:8}}{2}$

 ∞

Table I.

Points de A	Points de B	Sort de A
45	45	$\frac{1}{2}$J.
30	45	$\frac{1}{4}$J.
15	45	$\frac{1}{8}$J.
0	45	$\frac{1}{16}$J.
30	30	$\frac{1}{2}$J.
15	30	$\frac{5}{16}$J.
0	30	$\frac{3}{16}$J.
15	15	$\frac{1}{2}$J.
0	15	$\frac{11}{32}$J.
0	0	$\frac{1}{2}$J.

Table II.

Jeux de A	Jeux de B	Sort de A
3	3	$\frac{1}{2}$P.
2	3	$\frac{1}{4}$P.
1	3	$\frac{1}{8}$P.
0	3	$\frac{1}{16}$P.
2	2	$\frac{1}{2}$P.
1	2	$\frac{5}{16}$P.
0	2	$\frac{3}{16}$P.
1	1	$\frac{1}{2}$P.
0	1	$\frac{11}{32}$P.
0	0	$\frac{1}{2}$P.

∞ $\frac{5}{16}$ J. L'on trouvera tout de même les ſorts d'A pour les autres hipotêſes, comme ils ſont marqués dans cette Table. Pour ceux de B, ils ſont aisés à ſuppléer, étant toûjours les reſtes de ceux d'A à l'unité.

II. De même ſi les deux joüeurs ſont à deux de jeu, il eſt manifeſte, que chacun d'eux peut également eſpérer de gagner la Partie, en faiſant deux jeux de ſuite; & que par conſéquent le ſort de chacun eſt $\frac{1}{2}$ P ou $\frac{1}{2}$ Partie. Mais ſi (la Partie ſe faiſant par exemple à quatre jeux) A en avoit gagné 2, & B 3, ou (ce qui eſt le même) si B avoit l'avantage du jeu, il y auroit autant d'apparence, que le prémier jeu les rendît à deux de jeu, ou qu'il fit perdre la Partie à A (ſelon que celuy-cy gagneroit ou perdroit ce jeu) ce qui luy feroit avoir $\frac{1 \cdot 1{:}2 + 1 \cdot 0}{2}$ ∞ $\frac{1}{4}$ P. L'on conclud de même, que ſi A avoit un jeu, & B trois, le ſort d'A ſeroit $\frac{1}{8}$ P. Et ainsi du reſte, comme vous voyez dans cette autre Table, qui comprend les ſorts d'A par rapport à toute la Partie. Vous jugez, qu'elle doit étre la même que la prémiére; car ce que les 4 coups d'un jeu ſont à l'égard de ce jeu, les 4 jeux le ſont à l'égard de toute la Partie.

III. Conſidérons encore les deux joüeurs, comme étant à deux de jeu, & donnons en outre à A 30 & à B 45: vous voyez que le prémier coup doit les mettre à deux, & ainsi égaler leur ſort, si A gagne le

Table III.

Jeux d'A	III. II.	II.	I.	O.	I.	O.	I.	O.	O.
Jeux de B	III. ou II.	III.	III.	III.	II.	II.	I.	I.	O.
Points de A. B.	*Sorts de A:*								
45.45	1: 2	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	1: 2	11: 32	1: 2
30.45	3: 8	1: 8	1: 16	1: 32	7: 32	1: 8	13: 32	17: 64	27: 64
15.45	5:16	1:16	1: 32	1: 64	11: 64	3: 32	23: 64	29:128	49:128
0.45	9:32	1:32	1: 64	1:128	19:128	5: 64	42:128	53:256	93:256
45.30	5: 8	3: 8	3: 16	3: 32	13: 32	1: 4	19: 32	27: 64	37: 64
30.30	1: 2	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	1: 2	11: 32	1: 2
15.30	13:32	5:32	5: 64	5:128	31:128	9: 64	55:128	73:256	113:256
0.30	11:32	3:32	3: 64	3:128	25:128	7: 64	49:128	63:256	103:256
45.15	11:16	7:16	7: 32	7: 64	29: 64	9: 32	41: 64	59:128	79:128
30.15	19:32	11:32	11: 64	11:128	49:128	15: 64	73:128	103:256	143:256
15.15	1: 2	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	1: 2	11: 32	1: 2
0.15	27:64	11:64	11:128	11:256	65:256	19:128	113:256	151:512	231:512
45. 0	23:32	15:32	15: 64	15:128	61:128	19: 64	85:128	123:256	163:256
30. 0	21:32	13:32	13: 64	13:128	55:128	17: 64	79:128	113:256	153:256
15. 0	37:64	21:64	21:128	21:256	95:256	29:128	143:256	201:512	281:512
0. 0	1: 2	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	1: 2	11: 32	1: 2

gne le coup; & s'il le perd, que B doit avoir l'avantage du jeu, auquel cas nous avons trouvé le ſort d'A $\frac{1}{4}$ P: c'eſt pourquoy l'eſpérance qu'il a de gagner la Partie eſt maintenant $\frac{1.\,^{1:2} + 1.\,^{1:4}}{2} \infty \frac{3}{8}$ P. Suppoſons enſuite, que A ait deux jeux (ou un jeu) & B trois, & qu'ils ſoient à deux, ou trentains, ou quinzains; il eſt viſible, que chacun pouvant également gagner le jeu, c'eſt tout comme s'ils n'avoient rien au de là de leurs jeux, de ſorte que le ſort d'A eſt encore, comme il a eté trouvé dans l'article précédent, $\frac{1}{4}$P (ou $\frac{1}{8}$ P). Mais si A avoit 2 jeux à 3, & 30 à 45, il pourroit également acquerir 45, ou perdre la Partie avec le jeu (ſuivant qu'il gagneroit ou perdroit le prémier coup) ce qui luy vaudroit $\frac{1.\,^{1:4} + 1.\,^{0}}{2} \infty \frac{1}{8}$ P. Et si outre les 2 jeux à 3 il n'avoit que 15 à 45, le prémier coup luy pourroit également donner 30 à 45, ou luy faire perdre le jeu & la Partie; ce qui alors rendroit ſon ſort $\frac{1.\,^{1:8} + 1.\,^{0}}{2} \infty \frac{1}{16}$ P. &c. C'eſt de cette maniére, que j'ay calculé la troiſiéme Table, qui comprend les ſorts d'A pour tous les états poſſibles des deux jouëurs, lors qu'outre les jeux entiers ils ont encore gagné quelques points. Elle eſt donc générale, & elle renferme auſſi dans les derniers chifres de ſes rangs perpendiculaires toute la deuxiéme Table. Si vous prenez la peine de l'examiner, vous y pourrez faire pluſieurs reflexions dignes de remarque. Vous verrez par ex. que 15 à 30, les jouëurs étant à deux de jeu, valent tout juſte autant, que 30 à rien avec deux jeux à trois, ou 45 à 30 avec un jeu à deux, ou enfin 30 à 45 avec un jeu à un: qu'un jeu à deux avec 45 à 15 vaut tant ſoit peu mieux pour A, que s'ils étoient encore au commencement de la Partie, & que A n'eût rien & B 15, n'y ayant que $\frac{1}{512}$ de diférence entre les ſorts de ces deux hipotêſes. &c.

IV. Tachons préſentement de découvrir les ſorts de jouëurs, quand ils ſont d'inégale force: Pour abreger le calcul, ſoit pris généralement *n* pour le nombre des coups, qu'on ait vû gagner au plus fort A, contre leſquels le plus foible B n'en ait gagné qu'un; de ſorte que

te que n à 1 marque la raiſon des forces des deux joüeurs; aprés quoy mettons, qu'ils ſoient à deux, & quil faille trouver leur ſort. Si un ſeul coup ſufiſoit à chacun d'eux pour gagner le jeu, la queſtion ſeroit déja decidée; puiſque la raiſon de n à 1, qui eſt celle de leurs forces, ſeroit auſſi celle de leurs eſpérances pour ce jeu-là; mais parce que les loix du jeu en ont ordonné autrement, & qu'elles demandent qu'on gagne deux coups de ſuite pour gagner le jeu, la raiſon qu'on cherche eſt différente de celle-là, & il faut un peu d'analyſe pour la trouver. Sachant donc, qu'aprés le prémier coup l'un doit avoir l'avantage, & qu'aprés le ſecond coup le jeu ſe peut remettre à deux, & qu'étant à deux il retourne le même ſort inconnu, que nous voulons chercher, apellons le ſort d'A en cet état x, & conſidérons ce qui arriveroit, ſi l'un ou l'autre gagnoit l'avantage. Or ſi A le gagne, qui eſt n fois plus habile joüeur que l'autre, il y aura pour luy n aparences de gagner le jeu, & une aparence de ſe remettre à deux (ſuivant qu'il gagnera auſſi ou perdra l'autre coup) ce qui luy vaut $\frac{n.\,1+1.\,x}{n+1} \infty \frac{n+x}{n+1}$: & si c'eſt B qui gagne l'avantage, il y aura pour A n vrayſemblances de ſe remettre à deux, & une vrayſemblance de perdre le jeu; ce qui luy fait $\frac{n.\,x+1.\,0}{n+1} \infty \frac{nx}{n+1}$. D'où il s'enſuit, que les joüeurs étant encore à deux, auquel cas il y a pour A par la même raiſon n fois plus de vrayſemblances de gagner l'avantage, que de le perdre, ſon ſort doit étre $\frac{n.\,n+x:n+1+1.\,nx:n+1}{n+1} \infty \frac{nn+2nx}{nn+2n+1}$, & parce que le même eſt apellé x, il y aura $x \infty \frac{nn+2nx}{nn+2n+1}$; ce qui nous donne $x \infty \frac{nn}{nn+1}$, & reſte pour le ſort de ſa Partie $\frac{1}{nn+1}$, tellement que leurs ſorts ſont entre eux en raiſon de nn à 1, doublée de celle de leurs forces n à 1. Cecy étant établi, l'on pourra continüer par ordre nôtre recherche pour toutes les autres hipotêſes, comme on a fait dans les articles precédens, pourvû qu'on ſe ſouvienne icy, qu'à chaque coup il eſt n fois plus probable, que A gagne ce coup, qu'il n'eſt probable, qu'il le perde: Poſé donc par exemple, qu'A ait 30,

& B

Table IV.

Points de A	Points de B	Sorts de A.
45	45	$\frac{nn}{nn+1}$
30	45	$\frac{n^3}{n^3+nn+n+1}$
15	45	$\frac{n^4}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$
0	45	$\frac{n^5}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
45	30	$\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$
30	30	$\frac{nn}{nn+1}$
15	30	$\frac{n^5+3n^4+n^3}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
0	30	$\frac{n^6+4n^5+n^4}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$
45	15	$\frac{n^4+2n^3+2nn+2n}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$
30	15	$\frac{n^5+3n^4+4n^3+3nn}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
15	15	$\frac{n^5+3n^4+4n^3}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
0	15	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$
45	0	$\frac{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
30	0	$\frac{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+6nn}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$
15	0	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+10n^3}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$
0	0	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$

& B 45; il y a n cas qui mettent le jeu à deux, & un cas qui le fait perdre à A; ce qui luy vaut $\frac{n.\,^{nn:nn+1}+1.^{\circ}}{n+1} \infty \frac{n^3}{n^3+nn+n+1}$. Poſé qu'A ait 15 à 45, il y a n cas, qui luy ſont gagner 30 à 45 & encore un cas qui luy fait perdre le jeu; ce qui luy fait naître le ſort $\frac{n.\,^{n^3:n^3+nn+n+1}+1.^{\circ}}{n+1} \infty \frac{n^4}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$. On trouve de la même maniére le ſort d'A, quand il n'a rien & B 45. Lors qu'ils ſont trentains, ils ont le même ſort qu'étant à deux, parce qu'il leur faut auſſi gagner deux coups de ſuite, pour faire le jeu. On trouvera de même leur ſort, A ayant 15 ou 0, & B 30. Semblablement on cherche les ſorts, A ayant 45, & B 30, 15 ou 0; comme auſſi A ayant 30, & B 15 ou 0. Ainſi l'on ne peut ignorer les ſorts, quand ils ſont quinzains, ou A ayant 0 & B 15, ou au contraire A 15 & B 0, ou enfin quand ils ſont encore à but. C'eſt ce qui produit la quatriéme Table, où eſt contenüe la valeur des eſpérances de A (par raport à chaque jeu) généralement pour toute ſorte de raiſons, qu'on puiſſe imaginer entre les forces des joueürs:

V. Vous jugez bien, que si vous y prenez n pour 1, il en doit reſulter la prémiére Table, faite pour des joueürs d'égale force: & ſi vous faites valoir ſucceſſivement cette lettre pour 2, 3, 4. &c. la Table ſervira pour des joueürs, dont l'un eſt deux, trois, ou quatre fois plus fort que l'autre. Si par exemple A eſt deux fois plus fort que B, vous trouverez ſon ſort, étant à deux, $\frac{4}{5}$ J; & ayant 30 à 45 vous le trouverez $\frac{8}{15}$ J; de ſorte qu'il reſtera pour celuy de B, $\frac{1}{5}$ J & $\frac{7}{15}$ J; & par conſéquent les ſorts des deux joueürs en ces cas ſeront entre eux en raiſon de 4 à 1, & de 8 à 7, & ainsi de tout le reſte, comme il eſt repréſenté dans la cinquiéme Table.

Vous vous ſouviendrez pourtant de ce que j'ay dit, que ces Tables ne ſervent que pour chaque jeu ſéparément; car il en faudroit encore donner une ſemblable, qui comprit les ſorts des joueürs par raport à toute la Partie, lors qu'ils jouënt à pluſieurs jeux, dont ils ont déja gagné quelques uns, avec quelques points encore, ſi vous voulez; comme j'ay fait la troiſiéme Table pour des joueürs égaux: mais parce que la continuation de cette recherche par lettres ſeroit

tres-

Table V.

Points de A	B	Raiſons de leurs ſorts, A étant plus fort que B, 2 fois		3 fois		4 fois.	
45	45	4 .	1	9 .	1	16 .	1
30	45	8 .	7	27 .	13	64 .	21
15	45	16 .	29	81 .	79	256 .	169
0	45	32 .	103	243 .	397	1024 .	1101
45	30	14 .	1	39 .	1	84 .	1
30	30	4 .	1	9 .	1	16 .	1
15	30	88 .	47	513 .	127	1856 .	269
0	30	208 .	197	891 .	389	8448 .	2177
45	15	44 .	1	159 .	1	424 .	1
30	15	124 .	11	621 .	19	2096 .	29
15	15	112 .	23	297 .	23	2048 .	77
0	15	176 .	67	891 .	133	49408 .	3717
45	0	134 .	1	639 .	1	2124 .	1
30	0	392 .	13	1269 .	11	10592 .	33
15	0	224 .	19	999 .	25	52608 .	517
0	0	208 .	35	243 .	13	51968 .	1157

tres-pénible, & demanderoit un calcul immenſe, je me contenteray de faire voir dans un exemple particulier, comment il s'y faudroit prendre, pour trouver en abregé ce qu'on cherche. Supoſons, que la Partie ſe face à 4 jeux: que A ait un jeu & outre cela 15, B deux jeux avec 45, & que A ſoit deux fois plus fort que B; on veut ſçavoir la valeur des eſpérances qu'ils ont de gagner la Partie. Remarquons avant toute choſe que les facilités, qu'ont ces joueurs à gagner chaque jeu étant encore à but, ſont entre elles par la cinquiéme Table en raiſon de 208 à 35, ou bien de $\frac{208}{35}$ à 1; & que par conſéquent celuy qui eſt deux fois plus fort qu'un autre, aura $\frac{208}{35}$ fois (c'eſt près de ſix fois) plus de facilité pour gagner ce jeu: enſuite de quoy conſidérons, que le jeux, dont ils ont déja fait une Partie,

étant

étant achevé, ils auront ou deux jeux à deux, ou un jeu à trois (ſuivant que l'un ou l'autre l'aura gagné) en quelle ſituation il leur manquera encore ou deux jeux à chacun, ou trois jeux à A & un jeu à B. Or il eſt bien clair, que c'eſt alors tout comme s'il leur manquoit ſeulement autant de coups, qu'il leur manque de jeux (c'eſt à dire comme s'ils eſtoient trentains, ou 15 à 45) ſuposé que la facilité, que le plus fort a de gagner un jeu entier, fût celle, qu'il a de gagner un ſimple coup, & que nous avons nommée n. Mais cette facilité, comme je viens de dire, eſt exprimée par $\frac{208}{35}$; ſi vous ſubſtituez donc cette fraction numerique à la place de n dans les quantités $\frac{nn}{nn+1}$ & $\frac{n4}{n4+2n3+2nn+2n+1}$, qui marquent, par la 4me Table, le ſort de A quand il eſt trentain ou 15 à 45, vous aurez les ſorts, qui luy tombent quand il a deux jeux à deux, ou un jeu à trois, qui ſeront ainsi $\frac{43264}{44489}$ P & $\frac{1871773696}{2627030961}$ P. Et par ce que l'on ſupose, que ce jouëur a 15 à 45 du jeu qu'on jouë préſentement, auquel état il a 16 cas de gagner ce jeu, & 29 cas de le perdre, par la cinquiéme Table; il s'enſuit, qu'il y a 16 cas qui luy acquiérent deux jeux à deux, & 29 cas, qui luy font avoir un jeu à trois, ce qui rend la valeur de ſon eſpérance à gagner la Partie,

$$\frac{16 \cdot \frac{43264}{44489} + 29 \cdot \frac{1871773696}{2627030961}}{45} \infty \frac{19031314432}{23643278649} \text{ P};$$

& il reſte pour celle de B, $\frac{4611964217}{23643278649}$ P; de ſorte que ces eſpérances ſont entre elles en raiſon de 19031314432 à 4611964217, qui eſt un peu plus que quadruple. Mais paſſons plus outre.

VI. Si le raport des forces de deux jouëurs eſt connu, l'on peut ſçavoir, combien l'un doit donner d'avantage à l'autre pour rendre le jeu égal. On n'a qu'à jetter les jeux ſur la cinquiéme Table, pour voir où les nombres, qui marquent le raport de leurs eſpérances, s'aprochent le plus. C'eſt ainsi que nous obſervons, que lorſque A eſt deux fois plus fort que B, leurs ſorts différent le moins, A n'ayant rien & B 30; de ſorte que A peut donner à B 30, & même avec quelque petit avantage pour ſoy, ſon eſpérance à gagner le jeu étant tant ſoit peu plus grande que celle de B. Si A eſt trois fois plus fort que B, & qu'il luy donne 45, nous voyons, qu'il y a un avantage notable pour B, mais qu'il y a beaucoup plus d'avanta-

 ge pour

ge pout luy même, s'il ne luy donne que 30. Pour rendre donc la Partie égale autant qu'il ſe peut, il faudroit qu'il donnât à B 45, prenant pour luy 15. Si A eſt quatre fois plus fort, il peut donner à B 45, pourtant avec quelque petit avantage pour B; mais s'il étoit cinq fois plus fort que B, il pourroit luy donner 45, & auroit encore un avantage aſsés conſidérable pour ſoy-même, puiſque leurs ſorts ſe trouveroient être comme 3125 & 2491 &c.

VII. Si A donne à B 15, ou 30, ou 45, ſçavoir au contraire, de combien A eſt plus fort que B? Pour reſoudre cette queſtion il faut conſidérer, que lors que pour égaler la Partie A donne à B un avantage de quelques points, le ſort de chacun doit être $\frac{1}{2}$; c'eſt pourquoi l'on prendra dans la Table IV les quantités, qui marquent le ſort de A, lors qu'il n'a rien, & B 45, ou 30, ou 15, & on les fera chacune ∞ $\frac{1}{2}$; ce qui nous fournit trois égalités:

$$\frac{n^5}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1} \infty \frac{1}{2},$$

$$\frac{n^6+4n^5+n^4}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1} \infty \frac{1}{2},$$

$$\& \quad \frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1} \infty \frac{1}{2}$$

leſquelles étant reduites ſeront

$$n^5-3n^4-4n^3-4nn-3n-1 \infty 0,$$
$$n^6+4n^5-5n^4-8n^3-7nn-4n-1 \infty 0,$$
$$n^7+5n^6+11n^5-5n^4-15n^3-11nn-5n-1 \infty 0.$$

Et parce que les racines de ces équations, qui marquent la valeur de l'inconnuë n, ſont ſourdes, il s'enſuit que les forces des joüeurs, dont l'un donne à l'autre un avantage de quelques coups, ſont incommenſurables entre elles. La racine de la prémiére eſt à peu prés 4.216 (ou environ $4\frac{1}{5}$), de la ſeconde 1.946 (ou $1\frac{9}{10}$), de la troiſiéme 1.313 (ou $1\frac{3}{10}$); ce qui fait voir, que celuy qui peut donner à l'autre quarante-cinq, doit étre $4\frac{1}{5}$ fois plus fort: que celuy qui peut donner trente, doit étre $1\frac{9}{10}$ fois; & qui peut donner quinze, $1\frac{3}{10}$ fois plus fort que l'autre: c'eſt à dire, que le prémier

doit

doit gagner 42, le ſecond 19, & le troiſiéme 13 coups, lorsque leurs Parties en gagnent 10.

Or si A donne à B l'avantage, qui eſt neceſſaire pour rendre le Jeu égal, ce ſera toute la même choſe, de jouër à un jeu, ou à deux jeux, ou à trois, ou à tant qu'il vous plaira: car s'il eſt également probable, que A gagne un jeu, ou qu'il le perde; il eſt auſſi également poſſible, qu'il face deux jeux de ſuite, ou qu'il les perde; quand la partie ſe fait à deux jeux; ou bien qu'il gagne ou perde trois jeux, quand elle ſe fait à trois jeux &c.

VIII. Si A donne à B demi-15, ou demi-30, ou demi-45, ſçavoir de combien A eſt plus fort que B? Mettons, qu'A donne à B demi-45, que la Partie ſe jouë à deux jeux; que B prenne au premier jeu 30, & à l'autre 45; puis derechef 30, si la Partie ſe remet à deux de jeu, puis 45, & ainsi alternativement; & que toutes les fois qu'il prend 30, ſon eſpérance de gagner le jeu ſoit à celle de A en raiſon de b à a, & toutes les fois qu'il prend 45, en raiſon de d à c. Cela posé, faiſons le ſort d'A au commencement de la Partie $\infty\ z$, & conſidérons ce qui arriveroit, si B gagnoit le prémier jeu: Alors B prendroit 45, & par l'hipotéſe A auroit c vraiſemblances de gagner le jeu ſuivant, & d vraiſemblances de le perdre. Or si A le gagne, la Partie ſe remet à deux de jeu, & il faut que B reprenne 30, tout de même qu'au comencement de la Partie: mais si A le perd, il perd enſemble la Partie: d'où il ſuit, que le ſort de A ſeroit en ce cas $\frac{c.z + d.0}{c+d} \infty \frac{cz}{c+d}$. Que ſi au contraire A avoit gagné le prémier jeu, B prendroit auſſi 45 & A auroit aprés cela c aparences de gagner enſemble le jeu & la Partie; & d aparences de remettre la Partie à deux de jeu, en perdant le jeu: ainsi ſon ſort ſeroit alors $\frac{c.P + d.z}{c+d} \infty \frac{cP + dz}{c+d}$ Enfin conſidérans les jouëurs comme au commencement de la Partie, où B prend 30, nous voyons qu'il y a pour A, a probabilités de gagner l'avantage du jeu, c'eſt a dire de parvenir au ſort précédent $\frac{cP + dz}{c+d}$, & b probabilités de perdre cet avantage & d'acquerir ainsi le ſort $\frac{cz}{c+d}$; ce qui luy vaut

$\frac{a . cP + dz : c+d + b . cz : c+d}{a+b} \propto \frac{acP + adz + bcz}{a+b . c+d}$. Mais nous ſupoſions le même ſort, qu'obtient A au commancement de la Partie $\propto z$; c'eſt pourquoi il y a égalité entre z & la dite quantité $\frac{acP + adz + bcz}{a+b . c+d}$, laquelle étant reduite on trouvera $z \propto \frac{ac}{ac+bd} P$. Et parce que la Partie à demi-45 eſt ſuposée égale, dans laquelle avant le commencement du jeu le ſort de chacun ſoit $\frac{1}{2}$ P, il doit y avoir encore égalité entre $\frac{1}{2}$ P, & la valeur trouvée de z, d'où il reſulte celle-cy $ac \propto bd$, qui nous donne l'analogie $a . b :: d . c$.

Cela fait voir, que la Partie ſera égale, quand ces quatre quantités a, b, d, c, ſont proportionnelles; c'eſt à dire, quand l'eſpérance du plus fort à gagner le jeu eſt à l'eſpérance du plus foible (ayant 30) comme reciproquement l'eſpérance du plus foible (ayant 45) eſt à celle du plus fort: ou bien, quand il y a 2, 3 ou 4 fois plus d'aparence, que le foible perde le jeu, ayant 30, & qu'il y ait au contraire autant d'aparence, qu'il le gagne, ayant 45, on luy peut donner demi-45.

Et il eſt à remarquer, qu'il n'importe, ſoit que B prenne au prémier jeu 30 & à l'autre 45; ou qu'au contraire il prenne d'abord 45, & puis 30: car ayant fait nôtre calcul, pour cette derniere hipotêſe, nous trouverons $z \propto \frac{c . aP + bz : a+b + d . az : a+b}{c+d} \propto \frac{acP + bcz + adz}{a+b . c+d}$, c'eſt à dire encore $z \propto \frac{ac}{ac+bd}$ P, comme auparavant. Par conſéquent ceux-là ſe trompent, qui s'imaginent, qu'il y a de l'avantage à prendre au prémier jeu le moins, & à l'autre le plus.

Or parce que le même raiſonnement ſubſiſte toujours, quelque raiſon que puiſſent marquer les lettres a, b & d, c; il s'enſuit, qu'il en ſera de même de la Partie, qui ſe jouë à demi-30, ou à demi-15; ſçavoir, qu'elle ſera égale toutes les fois, que l'eſpérance de A par raport à chaque jeu ſurpaſſe celle de B & en eſt ſurpaſſée alternativement en même raiſon.

Pour faire l'aplication de ce que nous venons d'établir, il faut

déter-

déterminer pour chaque hipotéſe la valeur des lettres a, b, c, d; ce qui ſe fait ſans peine. On n'a qu'à prendre dans la 4me Table les ſorts de A, quand B eſt ſupoſé avoir 45, ou 30, ou 15, ou 0, à rien; lesquels étant par ordre $\frac{n^5}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$,

$\frac{n^6+4n^5+n^4}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$,

$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$,

$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$, ceux de B, comme les reſtes à l'unité, ſeront $\frac{3n^4+4n^3+4nn+3n+1}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$,

$\frac{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$,

$\frac{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$,

$\frac{15n^3+11nn+5n+1}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$;

& par conſéquent les eſpérances d'A auront à celles de B les raiſons

$\frac{n^5}{3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$, $\frac{n^6+4n^5+n^4}{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}$,

$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}$, $\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{15n^3+11nn+5n+1}$,

D'où il eſt clair, que quand la Partie ſe jouë à demi-45, l'on doit faire $\frac{a}{b} \infty \frac{n^6+4n^5+n^4}{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}$, & $\frac{c}{d} \infty$

$\frac{n^5}{3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$: quand elle ſe jouë à demi-30,

$\frac{a}{b} \infty$

$\frac{a}{b} \infty \frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}$, & $\frac{c}{d} \infty \frac{n^6+4n^5+n^4}{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}$: & enfin quand on la jouë à demi-15, $\frac{a}{b} \infty \frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{15n^3+11nn+5n+1}$, & $\frac{c}{d} \infty \frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}$. Subſtituans donc ces valeurs, nous aurons à la place de $ac \infty bd$, dans la prémiére hipotêſe, $\overline{n^6+4n^5+n^4}$ in $n^5 \infty \overline{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}$ in $\overline{3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$: dans la ſeconde, $\overline{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}$ in $\overline{n^6+4n^5+n^4} \infty \overline{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}$ in $\overline{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}$: & dans la troiſiéme, $\overline{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}$ in $\overline{n^7+5n^6+11n^5+5n^4} \infty \overline{15n^3+11nn+5n+1}$ in $\overline{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}$; c'eſt à dire, que la multiplication faite, nous aurons les trois égalités:

$$n^{11}+4n^{10}+n^9 \infty 18n^8+48n^7+77n^6+90n^5+77n^4+49n^3+23nn+7n+1,$$

$$n^{13}+9n^{12}+32n^{11}+54n^{10}+31n^9+5n^8 \infty 60n^8+170n^7+256n^6+263n^5+193n^4+102n^3+38nn+9n+1,$$

$$n^{14}+10n^{13}+47n^{12}+130n^{11}+221n^{10}+220n^9+75n^8 \infty 150n^7+335n^6+380n^5+281n^4+140n^3+47nn+10n+1;$$

lesquelles enſuite ſe reduiſent à celles-cy:

$$n^{11}+4n^{10}+n^9-18n^8-48n^7-77n^6-90n^5-77n^4-49n^3-23nn-7n-1 \infty 0,$$

$$n^{13}+9n^{12}+32n^{11}+54n^{10}+31n^9-55n^8-170n^7-256n^6-263n^5-193n^4-102n^3-38nn-9n-1 \infty 0,$$

$$n^{14}+10n^{13}+47n^{12}+130n^{11}+221n^{10}+220n^9+75n^8-150n^7-335n^6-380n^5-281n^4-140n^3-47nn-10n-1 \infty 0;$$

où l'inconnuë n nous marque la raiſon d'entre les forces des deux jouëurs. Celuy qui aura le loiſir, pourra chercher les racines de ces

équa-

équations; je conjecture, qu'elles ſont environ $2\frac{7}{10}$, $1\frac{6}{10}$, & $1\frac{1}{10}$, tellement que celuy qui peut donner demi-45, doit gagner 27: qui peut donner demi-30, doit gagner 16: & enfin qui peut donner demi-45, doit gagner 11 coups contre dix coups de ſa Partie.

Avant que de finir cet article, je dois encore remarquer, que si l'avantage qu'on donne alternativement au jouëur B, eſt tel, comme je l'ai dit, c'eſt à dire que les deux jouëurs faſſent par là à chaque jeu un échange continuel de leurs eſpérances, la Partie ſera toujours égale, non ſeulement quand on la jouë à un ou pluſieurs couples de jeux, comme l'on pourroit s'imaginer, mais auſſi à quel nombre de jeux, qu'on voudra la jouër. Car poſé qu'on jouë à 3, 4 ou 5 jeux, que A donne à B un avantage alternativement plus petit & plus grand: ſavoir le plus petit, quand la ſomme des jeux qui leur reſtent eſt un nombre pair, & le plus grand quand cette ſome eſt un nombre impair; & qu'au prémier cas il y ait deux fois plus d'aparence que A gagne le jeu, & qu'à l'autre il y ait au contraire deux fois plus d'aparence que B le gagne: on trouvera le ſort de chacun à chaque jeu par ordre, come l'on voit ici. (Tab. VI.) Les petits ronds vous marquent les jeux qui leur reſtent à faire; & il paroit, que quand le nombre de ces jeux eſt égal de part & d'autre, le ſort de chaque jouëur eſt toujours $\frac{1}{2}$P.

IX. A donne à B demi-30, & à C 45; combien B peut-il donner à C? *Reſp.* Parce que la force de B eſt à celle d'A, comme 10 à 16, par l'article précédent; & celle d'A à celle de C, comme 42 à 10, par l'art. 7. on doit conclure *ex æquo perturbatè*, que la force de B eſt à celle de C, comme 42 à 16, ou à peu prés comme 26 à 10; de ſorte que B pourra donner à C demi-45, par l'art. précéd.

X. A donne à B demi-30, & B à C demi-45; que peut donc A donner à C? *Reſp.* la force d'A étant à celle de B, comme 16 à 10: & celle de B à celle de C, comme 27 à 10, par l'article 8; il s'enſuit par la compoſition des raiſons, que la force d'A eſt à celle de C, comme 432 à 100, c'eſt a dire que celui-là peut donner à celui-cy quarante-cinq, par l'art. 7.

XI. A eſt deux fois plus fort que B, & cinq fois plus fort que C. Donc B eſt $\frac{5}{2}$ fois plus fort que C, & lui peut donner par conſéquent preſque demi-45, par l'art. 8.

Table VI.

Jeux qui reſtent A	B	*Somme de ces jeux*	*Sort de A*
○○	○○	*Pair*	$\frac{1}{2}$
○○	○	*Impair*	$\frac{1.\,^{1:2} + 2.\,^{0}}{3} \infty \frac{1}{6}$
○○○	○	P	$\frac{2.\,^{1:6} + 1.\,^{0}}{3} \infty \frac{1}{9}$
○○○○	○	I	$\frac{1.\,^{1:9} + 2.\,^{0}}{3} \infty \frac{1}{27}$
○○○○○	○	P	$\frac{2.\,^{1:27} + 1.\,^{0}}{3} \infty \frac{2}{81}$
○	○○	I	$\frac{1.\,^{1} + 2.\,^{1:2}}{3} \infty \frac{2}{3}$
○	○○○	P	$\frac{2.\,^{1} + 1.\,^{2:3}}{3} \infty \frac{8}{9}$
○	○○○○	I	$\frac{1.\,^{1} + 2.\,^{8:9}}{3} \infty \frac{25}{27}$
○	○○○○○	P	$\frac{2.\,^{1} + 1.\,^{25:27}}{3} \infty \frac{79}{81}$
○○○	○○	I	$\frac{1.\,^{1:2} + 2.\,^{1:9}}{3} \infty \frac{13}{54}$
○○○○	○○	P	$\frac{2.\,^{13:54} + 1.\,^{1:27}}{3} \infty \frac{14}{81}$
○○○○○	○○	I	$\frac{1.\,^{14:81} + 2.\,^{2:81}}{3} \infty \frac{2}{27}$

Jeux qui reſtent A	B	*Somme de ces jeux*	*Sort de A.*
○ ○	○ ○ ○	I	$\frac{1.\,8:9 + 2.\,1:2}{3} \infty \frac{17}{27}$
○ ○	○ ○ ○ ○	P	$\frac{2.\,25:27 + 1.\,17:27}{3} \infty \frac{67}{81}$
○ ○	○ ○ ○ ○ ○	I	$\frac{1.\,79:81 + 2.\,67:81}{3} \infty \frac{71}{81}$
○ ○ ○	○ ○ ○	P	$\frac{2.\,17:27 + 1.\,13:54}{3} \infty \frac{1}{2}$
○ ○ ○ ○	○ ○ ○	I	$\frac{1.\,1:2 + 2.\,14:81}{3} \infty \frac{137}{486}$
○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○	P	$\frac{2.\,137:486 + 1.\,2:27}{3} \infty \frac{155}{729}$
○ ○ ○	○ ○ ○ ○	I	$\frac{1.\,67:81 + 2.\,1:2}{3} \infty \frac{148}{243}$
○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○	P	$\frac{2.\,71:81 + 1.\,148:243}{3} \infty \frac{574}{729}$
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○	P	$\frac{2.\,148:243 + 1.\,137:486}{3} \infty \frac{1}{2}$
○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○	I	$\frac{1.\,1:2 + 2.\,155:729}{3} \infty \frac{1349}{4374}$
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○	I	$\frac{1.\,574:729 + 2.\,1:2}{3} \infty \frac{1303}{2187}$
○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○	P	$\frac{2.\,1303:2187 + 1.\,1349:4374}{3} \infty \frac{1}{2}$.

XII. A eſt $\frac{3}{2}$ fois plus fort que B, & B $\frac{5}{2}$ fois plus fort que C. Donc A eſt $\frac{15}{4}$ fois plus fort que C, & ainſi lui pourra donner plus de demi-45, & moins de 45.

XIII. Connoiſſant les raiſons d'entre les forces de trois Joüeurs A, B, C, joüans un à un en tous ſens, on connoîtra auſſi le raport de leurs forces, quand deux de ces joüeurs joüent de compagnie contre le troiſiéme. Supoſons, que les forces abſoluës des trois joüëurs ſoient marquées par les lettres l, m, n; que A joüe contre les deux autres, & qu'il joüe indifféremment tantôt à B, tantôt à C: S'il joüe à B, il a l degrés de facilité de gagner le coup. & m degrés de le perdre; ce qui luy vaut $\frac{l}{l+m}$: & s'il joüe à C, il a encore l degrés d'aparence de gagner le coup, & n degrés de le perdre; ce qui fait $\frac{l}{l+n}$. Donc s'il eſt également poſſible, qu'il envoie la balle à B ou à C, comme nous ſupoſons, il y a un cas, qui luy fait avoir $\frac{l}{l+m}$, & un autre, qui luy fait acquerir $\frac{l}{l+n}$; ce qui luy donne par rapport à ce coup-là, $\frac{1 \cdot l : l+m + 1 \cdot l : l+n}{2} \infty \frac{l}{2l+2m} + \frac{l}{2l+2n} \infty \frac{2ll+lm+ln}{2ll+2lm+2ln+2mn}$, tellement qu'il reſte pour le ſort des autres B & C, $\frac{lm+ln+2mn}{2ll+2lm+2ln+2mn}$. Ainſi leurs forces étant par exemple en raiſon de 3, 2, 1, le ſort d'A eſt $\frac{27}{40}$, & celuy des B & C $\frac{13}{40}$, c'eſt à dire que A peut gagner 27 coups, lorsque les autres n'en peuvent gagner que 13; de ſorte qu'il leur peut donner trente avec quelque avantage pour ſoi, comme il paroit par la cinquiéme Table. Que ſi vous faites $\frac{2ll+lm+ln}{2ll+2lm+2ln+2mn} \infty \frac{lm+ln+2mn}{2ll+2lm+2ln+2mn}$, vous aurez $ll \infty mn$; ce qui vous marque, que quand la force abſoluë de celui, qui joüe contre les deux autres, eſt moienne proportionnelle entre les forces de ceux-cy, la Partie ſe peut joüer à but.

Quand nous avançons, comme également probable, que le joüeur A envoie la balle à B ou à C, ce n'eſt qu'une ſupoſition, & la verité eſt, que plus le joüeur eſt habile, plus ſouvent il envoiera

la balle

la balle au plus foible. Pour avoir égard à cela, ſupoſez que toutes les fois qu'il joüe p balles au plus fort B, il en joüe un plus grand nombre q au plus foible C: donc il y a p cas, qui luy font avoir $\frac{l}{l+m}$, & q cas qui luy font obtenir $\frac{l}{l+n}$; ce qui luy vaut $\frac{p.\,l:l+m\,+\,q.\,l:l+n}{p+q}$ ∞ $\frac{pl}{p+q\,.\,l+m} + \frac{ql}{p+q\,.\,l+n}$ ∞ $\frac{pll+qll+qlm+pln}{pll+qll+plm+qlm+pln+qln+pmn+qmn}$: où si vous interpretez les lettres l, m, n, par 3, 2, 1, comme auparavant, & outre cela p par 1, & q par 3, vous trouverez le ſort d'A à l'égard de chaque coup ∞ $\frac{57}{83}$, plus grand que $\frac{27}{40}$ le ſort qu'il a, lors qu'il envoie les balles indiféremment à chacun des autres; en ſorte qu'il leur peut maintenant donner presque demi-45. Si vous faites $\frac{pll+qll+qlm+pln}{pll+qll+plm+qlm+pln+qln+pmn+qmn}$ ∞ $\frac{1}{2}$, vous aurez $plm - pln + pmn - pll$ ∞ $qlm - qln - qmn + qll$; ce qui marque, que la Partie à but ſera égale, quand p eſt à q, comme $lm - ln - mn + ll$ à $lm - ln + mn - ll$; & il faut pour cet effet, que mn ſoit toujours plus grande que ll.

Mais l'on doit encore ici conſidérer une choſe, qui contrebalance en quelque maniére l'avantage, que tire le joueür A de ce qu'il joüe le plus ſouvant au plus foible. C'eſt qu'étant ſeul contre deux, il ſe fatigue auſſi plus que chacun des autres, & que cette fatigue ſemble diminuër conſidérablement ſa force & ſon ſort: car trois perſonnes d'une égale force joüans enſemble, un contre deux, on voit bien, que ſelon ce calcul, la Partie devroit étre égale, au lieu qu'il eſt plus probable, que les deux la gagneront contre le troiſiéme, vû qu'ils ne ſe laſſent pas tant, & qu'ils ne défendent chacun que la moitié du Jeu de Paume. Pour avoir donc égard à cette diférence, il faudroit juger des forces abſoluës de nos joueürs par le nombre des coups, qu'ils gagnent ou qu'ils perdent, non quand ils joüent chacun ſeul contre A, mais quand ils joüent conjointement contre luy: car ayant obſervé par exemple, que de tous les coups, qui ſe joüent entre A & B, le nombre de ceux que A gagne eſt au nombre de ceux que gagne B, comme l à r; & que de tous les coups qui ſe joüent entre

entre A & C, le nombre de ceux que A gagne eſt au nombre de ceux que gagne C, comme l à s; il eſt clair, que les forces abſoluës des trois joüeurs A, B, C ſeront alors en raiſon de l, r, s; d'où leurs ſorts ſe déduiſent enſuite comme deſſus, en ſorte qu'on n'a qu'à ſubſtituër ſimplement les lettres r & s à la place de m & n.

XIV. Connoiſſant les raiſons des forces de quatre joüeurs A, B, C, D, joüans un à un en tous ſens, on connoîtra le rapoſt de leurs forces, quand ils joüent deux à deux, A & B contre C & D. Supoſons que leurs forces abſoluës ſoient exprimées par k, l, m, n; il ſe peut faire, que A (de même que B) jouë à C ou à D. Si A jouë à C, il a $\frac{k}{k+m}$; & s'il jouë à D, il a $\frac{k}{k+n}$ vraiſemblances de gagner le coup; c'eſt-ce qui le fait parvenir au ſort $\frac{1.k:k+m+1.k:k+n}{2} \infty \frac{2kk+km+kn}{2kk+2km+2kn+2mn}$. Par la même raiſon si c'eſt B qui jouë, ſon ſort eſt $\frac{1.l:l+m+1.l:l+n}{2} \infty \frac{2ll+lm+ln}{2ll+2lm+2ln+2mn}$. Or il eſt également poſſible, que A ou B joüe: donc il y a un cas, qui leur aporte $\frac{2kk+km+kn}{2kk+2km+2kn+2mn}$, & un autre, qni leur donne $\frac{2ll+lm+ln}{2ll+2lm+2ln+2mn}$; ce qui leur vaut $\frac{2kk+km+kn}{4kk+4km+4kn+4mn}+\frac{2ll+lm+ln}{4ll+4lm+4ln+4mn}$. Ainsi les forces abſoluës des quatre joueurs A, B, C, D, étant comme 1, 5, 2, 3, le ſort d'A & B par raport à chaque coup ſera $\frac{323}{672}$, & celuy de C & D $\frac{349}{672}$; ſi bien que ceux-cy peuvent donner à ceux-là preſque demi-quinze. Si dans les dénominateurs de ces fractions literales vous mettez $4kl$ au lieu de $4mn$, vous aurez

$$\frac{2kk+km+kn}{4kk+4km+4kn+4kl}+\frac{2ll+lm+ln}{4ll+4lm+4ln+4kl} \infty \frac{2k+m+n}{4k+4m+4n+4l} + \frac{2l+m+n}{4l+4m+4n+4k} \infty \frac{2k+2l+2m+2n}{4k+4l+4m+4n} \infty \frac{1}{2};$$

ce qui montre, que si les forces des joüeurs d'un côté & d'autre ſe trouvent reciproquement proportionnelles, la Partie qu'ils joüent à but ſera égale. Toutes fois il faut ici repeter l'avertiſſement du précédent article,

ſçavoir

ſçavoir que les habiles ioüeurs tâchent toujours d'envoier les balles au plus foible, à quoi il faut avoir égard, si l'on y veut aller bien juſte.

XV. Si de deux joüeurs A & B l'un peut donner à l'autre un avantage de quelques coups, & qu'il aime mieux luy donner cet avantage en jeux entiers qu'en points; on veut ſçavoir, combien de jeux il luy doit donner? Par exemple, si A peut donner à B 45, & qu'il veüille joüer à but avec luy on demande, de combien de jeux il les luy peut donner tous à la reſerve d'un ſeul? Pour réſoudre cette queſtion, il faut conſidérer, que 1. A pouvant donner à B 45, la valeur de ſa force, marquée par la lettre n, ſera $\frac{4216}{1000}$ par l'art. 7me. 2. Quand il eſt à but avec B, l'eſpérance qu'il a de gagner le jeu eſt par la 4me Table, $\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$; par conſequent celle de B eſt

$$\frac{15n^3+11nn+5n+1}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n+11nn+5n+1}$$; & la raiſon de leurs eſpérances $\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{15n^3+11nn+5n+1}$. 3. Pour expliquer cette raiſon par nombres, en y ſubſtituant $\frac{4216}{1000}$ à la place de n, on peut ſe ſervir des Logaritmes, par le moien deſquels on la détermine ſans peine à $7\frac{114529}{134167}$. Nommons cette raiſon m, & cherchons ſucceſſivement, quel eſt le ſort de A par raport à la Partie, quand il luy manque 1, 2, 3, 4 &c. jeux, pendant qu'à B il n'en manque toujours qu'un; juſqu'à ce que nous voïons par la progreſſion, quel doit étre ce ſort, lors qu'il luy manque x jeux. Or s'il luy manque un jeu, de même qu'à B, c'eſt à dire si les deux joüeurs ſont à deux de jeux, il eſt aisé de juger par ce que j'ay démontré dans l'art. 4, que le ſort de A eſt $\frac{mm}{mm+1}$. S'il luy manque deux jeux, il eſt clair qu'il y a m cas, qui le pourront mettre à deux de jeu avec B en luy faiſant gagner le jeu, & un cas qui luy fait perdre le jeu & la Partie ce qui luy vaut $\frac{m \frac{mm:mm+1}{} + 1.0}{m+1} \propto \frac{m^3}{mm+1.m+1}$. S'il luy manque trois jeux, il n'eſt pas moins clair, que m cas luy en feront reſter deux en luy faiſant gagner le jeu, & qu'un cas luy fera encore

perdre

perdre la Partie; ce qui luy produit $\frac{m.\,m^3 : mm+1.m+1 + 1.\,0}{m+1} \infty \frac{m^4}{mm+1.\overline{m+1}^2}$. Et s'il luy en manque quatre, il y a *m* cas qui luy en feront reſter trois, & un cas qui luy fera perdre la Partie, ce qui luy aporte $\frac{m.\,m^4 : mm+1.\overline{m+1}^2 + 1.\,0}{m+1} \infty \frac{m^5}{mm+1.\overline{m+1}^3}$. En un mot, quel nombre de jeux qu'il luy manque, ſon ſort ſe trouve toujours exprimé par une fraction, dans laquelle l'expoſant de *m* eſt plus grand, & celuy de $m+1$ plus petit d'une unité, que le nombre de ces jeux. D'où l'on infére, que s'il manque *x* jeux à A & un jeu à B, c'eſt à dire s'ils joüent à *x* jeux, dont A donne $x-1$ d'avance à [illegible] ſort de A ſera $\frac{m^{x+1}}{mm+1.\overline{m+1}^{x-1}}$; & parce qu'en cet état la Partie eſt ſuposée égale, il y aura $\frac{m^{x+1}}{mm+1.\overline{m+1}^{x-1}} \infty \frac{1}{2}$, c'eſt à dire $2.m^{x+1} \infty \overline{mm+1}.\overline{m+1}^{x-1}$; & en prenant les logaritmes, $L2 + \overline{x+1}\,Lm \infty L\overline{mm+1} + \overline{x-1}\,L\overline{m+1}$ ou par la tranſpoſition $xL\overline{m+1} - xLm \infty L\overline{m+1} + Lm + L2 - L\overline{mm+1}$; & enfin par la diviſion $x \infty \frac{L\overline{m+1} + Lm + L2 - L\overline{mm+1}}{L\overline{m+1} - Lm}$. Pour achever maintenant la ſolution on n'a qu'à y mettre $\frac{7114529}{134167}$ au lieu de *m*, & ſon logaritme au lieu de *Lm* &c. moiennant quoi l'on trouve que *x* eſt tant ſoit peu plus grand que 38; de ſorte que celuy qui peut donner à l'autre 45 pourra luy donner juſques à 37 jeux entiers de 38; s'ils veulent joüer à but enſemble. D'où il paroit, qu'il y a bien de la diférence entre donner de 4 coups trois, & donner de 4 jeux trois; vû que nous venons de voir, que celuy qui peut donner à l'autre 45, c'eſt à dire trois coups de quatre, peut bien luy donner d'avantage que trois jeux de quatre. En voici le calcul:

$m \infty \frac{7114529}{134167}$, $m+1 \infty \frac{7248696}{134167}$,

$L\,7114529 \infty 6.8521462$, $L\,7248696 \infty 6.8602599$,
$L\,134167 \infty 5.1276457$, ... 5.1276457,

Lm [illegible]

$L\overline{m}$ ꝏ $L\frac{7114559}{134167}$ ꝏ 1.7245005; $L\overline{m+1}$ ꝏ $L\frac{7248696}{134167}$ ꝏ 1.73261
2,

Lmm ꝏ $2Lm$ . . ꝏ 3.4490010 . $L\overline{mm+1}$ ꝏ 3.44915

$L\overline{m+1}$	ꝏ 1.7326142	81137) 3089892 (38 ꝏ
Lm	ꝏ 1.7245005	243411
$L2$	ꝏ 0.3010300	655782
$L\overline{m+1}+Lm+L2$.	ꝏ 3.7581447	649096
$L\overline{mm+1}$	ꝏ 3.4491555	6686
$L\overline{m+1}+Lm+L2-L\overline{mm+1}$	ꝏ 0.3089892	
$L\overline{m+1}-Lm$ . . .	ꝏ 0.0081137	

XVI. Le Joüeur A pouvant donner à B 45, l'on demande de combien de jeux il les luy peut donner tous à la reſerve d'un ſeul, ſi outre les jeux entiers qu'il luy donne, il luy veut encore donner 15 ou 30 à chaque jeu? Pour ſatisfaire à la queſtion, vous n'avez qu'à mettre $\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}$ & puis $\frac{n^6+4n^5+n^4}{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}$ (raiſons des eſpérances, qu'on leur trouve par la 4me Table, lorsque B a 15 ou 30 à rien) à la place de $\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{15n^3+11nn+5n+1}$ (raiſon des eſpérances qu'ils obtiennent quand ils joüent à but), en y interprétant encore n par $\frac{4216}{1000}$: ce qui vous fera trouver m ꝏ $\frac{6728590}{450125}$, & puis m ꝏ $\frac{1125963}{2637741}$; d'où le reſte ſe déduit comme deſſus, & il proviendra à peu prés x ꝏ 12, & enſuite x ꝏ 4; de ſorte que A peut donner à B 11 jeux de 12, & encore 15 points en chaque jeu; ou bien 3 jeux de 4 & encore 30 points en chacun.

XVII. Si A peut donner à B 30, & qu'on demande combien de jeux entiers il luy peut donner; il faut ſeulement changer la valeur de n, qui marque ſa force, en $\frac{1946}{1000}$ par l'art. 7me, & faire enſuite comme deſſus, pour trouver celle de x. Le calcul nous aprend, qu'il peut luy donner environ de cinq jeux quatre, & joüer à but; ou deux jeux de trois, & encore 15 points en chaque jeu. Si A ne peut donner à B que 15, la valeur de n ſera cenſée $\frac{1313}{1000}$ par l'art. 7. & l'on

trouvera qu'il ne ſauroit luy donner qu'un jeu de deux, s'il prétend de joüer à but avec luy.

XVIII. On peut former pluſieurs queſtions ſur les Biſques, qui ſont des coups d'avance donnés par l'une des parties à l'autre, qui en profite quand bon luy ſemble; & demander par exemple: si dans un cas donné il eſt plus avantageux de prendre ſa biſque, ou de ne la pas prendre? si deux biſques en quatre jeux valent mieux que demi-quinze: ou quinze & deux biſques mieux que demi-trente? & autres ſemblables. Mais comme ces queſtions nous meneroient trop loin, je ne veux pas les toutes entreprendre: je me contenterai ſeulement de m'arréter un peu ſur la prémiére. Supoſons, que les joueürs ne jouënt qu'à un jeu: que la force de A ſoit à celle de B en raiſon d'égalité ou d'inégalité quelconque, n à 1: & que B donne à A biſque (car bien que cela ne ſe pratique pas, quand on ſçait que les joüeurs ſont égaux: il arrive ſouvant, que B ne connoit pas les forces d'A, celuy-cy ayant diſſimulé auparavant ſon jeu; ou que A la demande par opiniâtreté, ou parce qu'il a perdu le jeu précédent qu'il jouoit à but, quoy qu'on ſache d'ailleurs qu'ils ſont égaux) puis ſupoſons, qu'ils ſoient à deux & que A n'ait pas encore pris ſa biſque; l'on demande, quelle eſt ſon eſpérance de gagner le jeu? & s'il fait mieux de prendre ſa biſque, ou de la garder plus long temps? Sur quoi je fais ce raiſonnement: S'il prend ſa biſque, il gagne l'avantage, mais il n'aura plus de biſque: par conſéquent ſon ſort ſera par la Table IV $\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$; s'il ne prend pas ſa biſque, il ſe peut faire qu'il gagne ou perde le coup prochain: s'il le gagne, il a gagné le jeu; car ayant l'avantage il ne manquera pas de prendre aprés ſa biſque: mais s'il perd le coup, il aura bien encore ſa biſque, mais B aura l'avantage; & puisque le ſort d'A en cette rencontre à cauſe de la biſque m'eſt encore inconnu, je l'apelle y. Y ayant donc par l'hipotêſe n cas qui luy ſont gagner le coup, & un cas qui le luy fait perdre, le ſort qu'il obtient quand il ne prend pas la biſque ſera $\frac{n.1+1.y}{n+1} \infty \frac{n+y}{n+1}$. Or, par le privilége des biſques, A eſt également en pouvoir de prendre ſa biſque ou de ne

la pas

la pas prendre; c'eſt à dire, il peut également acquerir $\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$ ou $\frac{n+y}{n+1}$: c'eſt pourquoi si le ſort, qui luy convient pendant cette indifférence, eſt apellé x, il y aura $x \infty \frac{n^3+nn+n}{2n^3+2nn+2n+2} + \frac{n+y}{2n+2}$.

Pour chercher le ſort y, il faut faire un ſemblable raiſonnement: Si A prend ſa biſque, il remet le jeu à deux, & n'aura plus de biſque; c'eſt-ce qui luy donne par la Table IV $\frac{nn}{nn+1}$. S'il ne prend pas la biſque, & qu'il gagne le coup, il gagne le ſort x (parce qu'il ſera à deux, & aura encore ſa biſque); mais s'il le perd il perd enſemble le jeu; c'eſt ce qui luy vaut alors $\frac{n.x+1.0}{n+1} \infty \frac{nx}{n+1}$. Or A eſt également en droit de prendre ſa biſque ou de ne la pas prendre, c'eſt à dire d'acquerir $\frac{nn}{nn+1}$ ou $\frac{nx}{n+1}$; c'eſt pourquoi ſon ſort pendant cette indiférence, que nous apellons y, ſera $\frac{nn}{2nn+2} + \frac{nx}{2n+2}$. Mettant donc cette valeur de y dans l'équation $x \infty \frac{n^3+nn+n}{2n^3+2nn+2n+2} + \frac{n+y}{2n+2}$, nous trouverons $x \infty \frac{4n^4+7n^3+7nn+4n}{4n^4+7n^3+8nn+7n+4} \infty$ $\frac{n+1.4n^3+3nn+4n}{nn+1.4nn+7n+4}$; & puis ſubſtituant reciproquement celle-cy nous aurons y $\left(\frac{nn}{2nn+2} + \frac{nx}{2n+2}\right) \infty \frac{nn.4nn+5n+4}{nn+1.4nn+7n+4}$.

Ainsi le jeu étant à deux, il ſe préſentent trois quantitez, $\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$ $\left(\frac{n^3+nn+n}{nn+1.n+1}\right)$, $\frac{n+y}{n+1}$ & $\frac{n+1.4n^3+3nn+4n}{nn+1.4nn+7n+4}$, qui marquent le ſort de A dans trois differentes hipotêſes: l'une, *quand il prend ſa biſque: l'autre, quand il ne la prend pas: & la troiſiéme (qui doit étre moienne entre les deux autres), quand il eſt encore dans l'indiférence de la prendre ou de ne la prendre pas. Et parce que la prémiére aprés la reduction à un même dénominateur ſe trouve plus grande que la troiſiéme, il s'enſuit qu'à plus forte rai-*

ſon elle ſera plus grande que la ſeconde, & que par conſéquent A fait mieux de prendre ſa biſqué, que de la garder pour une autre fois.

Si l'on examine ces trois autres quantitez $\frac{nn}{nn+1}$, $\frac{nx}{n+1}$, & $\frac{nn \cdot 4nn+5n+4}{nn+1 \cdot 4nn+7n+4}$, que nous avons trouvées par la même opération, & qui marquent le ſort de A dans les dites hipotêſes, quand B a l'avantage, ou (ce qui eſt autant) quand il a 45 à 30, l'on peut remarquer, que la prémiére eſt auſſi plus grande que les deux autres; de ſorte qu'en cet état A fait encore mieux de prendre ſa biſque.

Vous trouverez enfin avec ces raiſonnemens les ſorts du joüeur A, pour toutes les autres conſtitutions du jeu, lorsque B a 45 à 15, ou 45 à rien, ou 30 à 15 &c. & même avec moins de peine, ſi vous y allez par ordre; car vous ne rencontrerez plus dans vôtre opération que des ſorts déja trouvés & connus. Je me contente de vous les donner pour des joüeurs égaux dans les trois colonnes marquées I. II. III. de la Table ſeptiéme: la prémiére conſidére le joueur A, comme prenant ſa biſque; la troiſiéme, comme ne la prenant pas; & celle du milieu, comme ne s'étant pas encore déterminé s'il la prendra ou non: & l'on remarque par tout, que les fractions de la prémiére colonne ſont un peu plus grandes que celles des autres; d'où l'on peut généralement conclure, qu'il eſt toujours plut avantageux pour A de prendre d'abord ſa biſque, que de la garder plus long temps.

XIX. Le calcul du précédent article ſupoſe le joüeur A dans une parfaite indiférence au regard de ſa biſque, qui luy donne toujours un panchant égal de la prendre ou de ne la prendre pas: cepenpendant il faut remarquer, que quoi qu'il ſoit également en pouvoir de la prendre à chaque coup, il n'eſt pas toujours également probable qu'il la prenne; y ayant des endroits, où il peut la faire mieux valoir qu'en d'autres; ſi ce n'eſt peut-étre quand on joüe ſans faire des chaſſes, auquel cas je ne vois aucune raiſon, pourquoi il faudroit diférer la biſque d'un ſeul coup: mais faiſant des chaſſes, il y a des rencontres, où on la peut emploier si utilement, qu'elle ſert

preſque

Table VII.

NB. A & B *ſont des joüeurs égaux:* A a *une biſque à prendre.*

Points de A	B	*Sorts de A* I.	II.	III.	*col. de chaſſ.*	*Points de* A	B	*Sorts de A* I.	II.	III.	*col. des chaſſ.*
45	45	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{43}{60}$	$\frac{19}{15}$	30	15	$\frac{7}{8}$	$\frac{209}{240}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{17}{15}$
30	45	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{15}{7}$	15	15	$\frac{11}{16}$	$\frac{219}{320}$	$\frac{109}{160}$	$\frac{47}{44}$
15	45	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{15}{11}$	0	15	$\frac{1}{2}$	$\frac{319}{640}$	$\frac{159}{320}$	$\frac{61}{59}$
0	45	$\frac{1}{8}$	$\frac{29}{240}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{15}{13}$	30	0	$\frac{15}{16}$	$\frac{899}{960}$	$\frac{449}{480}$	$\frac{16}{15}$
30	30	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{43}{60}$	$\frac{19}{15}$	15	0	$\frac{13}{16}$	$\frac{779}{960}$	$\frac{389}{480}$	$\frac{123}{119}$
15	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{59}{120}$	$\frac{29}{60}$	$\frac{8}{7}$	0	0	$\frac{21}{32}$	$\frac{1007}{1536}$	$\frac{503}{768}$	30[illegible]/[illegible]8
0	30	$\frac{5}{16}$	$\frac{99}{320}$	$\frac{49}{160}$	$\frac{46}{43}$						

preſque de trente; car y ayant une chaſſe dificile à gagner pour A, elle eſt autant que perduë pour luy; prenant donc ſa biſque, il empêche non ſeulement ſa Partie de gagner 15, mais il les gagne luy-même, ce qui luy vaut 30. Comme donc la détermination du ſort des joüeurs, qui demande la conſidération des biſques, dépend de la conſtitution particuliére du jeu, de la diverſité des chaſſes, & même du caprice des joüeurs, qui n'obſervent point de regles, il eſt dificile d'en former des conjectures bien ſûres. Voici pourtant la maniére, dont je voudrois m'y prendre, s'il falloit encore avoir égard aux chaſſes: Posé que les joüeurs ſoient trentains ou à deux, & qu'il y ait une chaſſe plus dificile à gagner à l'un qu'à l'autre (le nombre des fois, qu'on en a vû gagner une ſemblable au joüeur A, étant au nombre des fois, qu'on en a vû gagner à B, en raiſon d'inégalité quelconque de m à 1) bien que les deux joüeurs ſoient d'ailleurs égaux; je conſidére, que ſi le joüeur A gagne la chaſſe ſans prendre ſa biſque, il gagne le jeu, car il ne manquera pas de la prendre aprés: & s'il perd la chaſſe, B aura l'avantage, mais A retiendra ſa biſque, qui luy vaut, par la IIme colonne de la VIIme Table, $\frac{13}{30}$. Parce donc que par l'hipotêſe ce joüeur a m degrez de facilité de gagner la chaſſe contre un degré de la perdre, le ſort, qu'il poſſéde quand il

ne prend pas ſa biſque, ſera $\frac{m.1 + 1.13:30}{m+1} \infty \frac{30m+13}{30m+30}$. Mais si au contraire il prend cette biſque, la chaſſe eſt morte, & ſon ſort ſe trouvé, par la I. colonne de la dite Table, $\frac{3}{4}$. Je n'ay donc qu'à chercher, laquelle des deux fractions, ou de $\frac{30m+13}{30m+30}$ où de $\frac{3}{4}$, ſurpaſſe l'autre; en faiſant ſur elles les mêmes opérations, que s'il y avoit égalité entre elles. juſqu'a ce que m demeure ſeule d'un côté: moiennant quoi je trouve, que le joüeur A fait mieux tantôt de garder, tantôt de prendre ſa biſque, ſuivant que m eſt plus grande ou plus petite que $\frac{12}{15}$; & qu'il luy doit étre indiférent de la prendre ou de la garder, si m eſt au juſte ∞ $\frac{12}{15}$. Poſé de nouveau, que A ait 30 à 45, ou que B ait l'avantage, & qu'il y ait la même chaſſe; il eſt clair, que si A la gagne ſans prendre ſa biſque, il ſera à deux, par conſéquent par la II. col. de la VIIme Table il aura $\frac{11}{15}$: mais que s'il perd la chaſſe, il perdra le jeu. Ayant donc m cas de la gagner & un cas de la perdre, il aura (quand il ne prend pas ſa biſque) $\frac{m.11:15 + 1.0}{m+1} \infty \frac{11m}{15m+15}$. Si A veut au contraire prendre la biſque, le jeu ſe met à deux, & la chaſſe étant morte le ſort de chacun ſera $\frac{1}{2}$. Faiſant donc comparaiſon entre $\frac{11m}{15m+15}$ & $\frac{1}{2}$, nous trouvons, qu'il vaut mieux pour A de garder ou de prendre la biſque, ſelon que m eſt plus grande ou plus petite que $\frac{15}{7}$, & que l'un vaut autant que l'autre, si $m \infty \frac{15}{7}$. De ce que je viens de faire voir, nous pouvons encore conclure, que la facilité, qu'a le joüeur A de gagner une chaſſe, étant exprimée par un nombre compris entre $\frac{12}{15}$ & $\frac{15}{7}$, il ſera mieux de garder ſa biſque, si le jeu eſt à deux; mais que si B a l'avantage, il feroit mieux de la prendre. Enfin c'eſt de cette maniére, que j'ay determiné tous les autres nombres de la colonne des chaſſes de la VIIme Table, qui nous peuvent marquer, quand le joüeur A doit prendre ou garder ſa biſque: car s'il a plus de facilité de gagner quelque chaſſe, qu'il n'eſt porté par ces nombres, il fait mieux de garder la biſque; s'il en a moins, il fait mieux de la prendre; & s'il en a tout juſte autant, il peut faire ſans préjudice ce qu'il veut.

XX.

XX. Il me reſte encore à parler des *ſervices*, & de l'avantage qu'il y a de les donner. Vous ſçavez, que le prémier coup de chaque bale, qu'on donne ſur le toit, s'apelle *ſervice*. Celuy qui le donne ſemble avoir quelque avantage par deſſus celuy qui le reçoit, pour deux raiſons: l'une, parce que le coup de ſervice eſt un coup ſeur, qui ſe donne la bale à la main; au lieu que les coups qui ſe joüent enſuite la bale en l'air ſont ſujets d'étre manqués: l'autre, parce que quand celuy qui ſert manque quelque bale, c'eſt une *chaſſe*, au lieu que quand l'autre la manque, il perd toujours quinze (du moins si la bale entre dans le jeu; car pour les *chaſſes de vers le jeu*, je n'en veux pas parler, de peur de me trop étendre, & il me ſufit de vous marquer en gros la route, qu'il faut tenir dans cette recherche.) Poſons qu'il y ait deux joüeurs A & B, que A donne le ſervice, que contre un coup qu'il a manqué, on ait obſervé qu'il ait fait p bons coups; & que contre un coup qu'a manqué B, on luy en ait vû faire q de bons: poſons encore que dans le temps que c'eſt à A de joüer, ſon eſpérance de gagner la bale ſoit y, mais que cette eſpérance devienne z, quand l'autre B doit joüer; & conſidérons prémiérement ce qui ſeroit de ces eſpérances, ſi l'on joüoit ſans faire des chaſſes, c'eſt à dire ſi la bale qu'on manque étoit toujours perduë pour celuy qui la devroit joüer. Or par ce que nous venons d'établir il eſt aiſé de voir, que ſi A doit joüer, il y a un cas, qui luy fera perdre la bale, & p cas qui luy faiſant reüſſir ſon coup mettront B dans la neceſſité de joüer, & changeront ainſi le ſort y du joüeur A en celuy de z. Si c'eſt au contraire B qui joüe à ſon tour, il y a un cas qui fera gagner la bale à A (en la faiſant perdre à B) & q cas qui remettront le joüeur A dans la neceſſité de joüer, & luy rameneront le ſort y.

Donc nous aurons d'un côté $y \infty \frac{1.0 + p.z}{1+p} \infty \frac{pz}{1+p}$; de l'autre $z \infty \frac{1.1 + q.y}{1+q} \infty \frac{1+qy}{1+q}$, c'eſt à dire, mettant à la place de y ſa valeur trouvée $\frac{pz}{1+p}$, $z \infty \frac{1+p+pqz}{1+p.1+q} \infty \frac{1+p+pqz}{1+p+q+pq}$; d'où l'on tire $z \infty \frac{1+p}{1+p+q}$. Or parce que le joüeur A ne ſauroit manquer

ſon

ſon coup de ſervice, il s'enſuit qu'il ne faut pas conter ce coup, & s'imaginer quand il le joué, comme si c'étoit à B de jouër : donc l'eſpérance qu'il a de gagner la bale ſera censée alors $\frac{1+p}{1+p+q}$ par conſéquent celle de B $\frac{q}{1+p+q}$, & la raiſon de ces eſpérances $1+p$ à q. D'où il paroit, que ſi les deux jouëurs ſont égaux, & que chacun puiſſe fraper par ex. dix bons coups contre un qui ne vaut rien, les lettres p & q valant chacune 10, l'avantage de celuy qui donne le ſervice ſur celuy qui le reçoit eſt comme de 11 ſur 10; mais que cet avantage augmente à meſure que les joüeurs ſont plus foibles, & qu'il diminuë juſques à s'anéantir entiérement, à meſure qu'ils ſe trouvent plus habiles.

XXI. Joignons y maintenant la conſidération des chaſſes, mais ſans nous embaraſſer de leur inégalité, en nous imaginant, comme si elles étoient toutes deſſous la corde; c'eſt à dire, comme si toutes les bales qui paſſent la corde, pouvoient les gagner. Vous ſçavez que quand il y a chaſſe, les joüeurs font un échange de leurs places, & paſſant chacun de l'autre côté du jeu, celuy qui a donné les ſervices, eſt obligé de les prendre aprés. Que ces quatre lettres v, x, y, z, marquent donc l'eſpérance d'A en quatre diférens états; ſçavoir, les deux prémiéres v & x, avant qu'il y ait chaſſe; les autres y & z aprés la chaſſe, quand les joüeurs ont paſſé: la prémiére v & troiſiéme y, quand c'eſt à A de joüer; & la ſeconde x & 4me z, quand l'autre B doit joüer. Cela posé, & le raiſonnement du précédent article compris, vous comprendrez auſſi ſans peine la raiſon des quatre égalitez ſuivantes, ſans qu'il ſoit beſoin d'alonger d'avantage ce diſcours: $v \infty \frac{1.y+p.x}{1+p} \infty \frac{y+px}{1+p}$, $x \infty \frac{1.1+q.v}{1+q} \infty \frac{1+qv}{1+q}$, $y \infty \frac{1.0+p.z}{1+p} \infty \frac{pz}{1+p}$, $z \infty \frac{1.1+q.y}{1+q} \infty \frac{1+qy}{1+q}$. Chaſsez de l'égalité x la lettre v, & de l'égalité y la lettre z, vous aurez $x \infty \frac{1+p+qy+pqx}{1+p.1+q}$, c'eſt à dire $x \infty \frac{1+p+qy}{1+p+q}$; & $y \infty$

$\frac{p+pqy}{1+p.1+q}$,

$\frac{p+pqy}{1+p.1+q}$, c'eſt à dire $y \propto \frac{p}{1+p+q}$. Chaſſés encore y de la nouvelle égalité x, vous trouverés enfin $x \propto \frac{1+2p+q+pp+2pq}{1+p+q^2}$, & ſon reſte à l'unité $1-x \propto \frac{q+qq}{1+p+q^2}$. D'où il faut conclurre, que l'eſpérance d'A, dans le temps que B doit recevoir de luy le coup de ſervice, eſt à celle de B en raiſon de $1+2p+q+pp+2pq$ à $q+qq$; où vous pouvés remarquer, que p & q étant égales plus on augmente leur valeur, plus cette raiſon approche de la triple, de ſorte que de deux jouëurs, qui jouënt également & parfaitement bien, celuy qui ſert a environ trois fois plus d'eſpérance de gagner la bale, que l'autre: mais ſouvenés vous, que c'eſt dans la ſuppoſition, qu'on ne faſſe point de diſtinction entre les chaſſes, & qu'on n'admette pas celles, qu'on apelle *de vers le jeu*; car autrement ce double regard diminûroit ſon avantage de beaucoup.

XXII. Je ne dois pas finir ma Lettre, Monſieur, ſans avoir prévenu certains faux raiſonnemens, qui pourroient tomber dans l'eſprit ſur cette matiére, de peur qu'ils n'éblouïſſent par leur éclat trompeur, & ne faſſent douter de la ſolidité des principes cy-deſſus établis. Dans l'article ſeptiéme on a demandé, combien de fois le jouëur A devoit étre plus fort que B, pour luy pouvoir donner 45? Quelqu'un auroit pû raiſonner là-deſſus ainſi: Si B joüoit contre un troiſiéme jouëur C de pareille force que luy, & qu'ils fuſſent 45 à 0, leurs ſorts ſeroient par la I Table en raiſon de 15 à 1, c'eſt à dire que B pourroit gagner le jeu 15 fois, lorsque C ne le feroit qu'une fois. Or A donnant 45 à B la Partie eſt ſuppoſée égale, c'eſt à dire telle, que quand B gagne 15 fois le jeu A le peut auſſi 15 fois. Donc A & C joüans enſemble à but, A le peut gagner 15 fois, là où C ne le peut gagner qu'une fois; & par conſéquent A doit étre 15 fois plus fort que C, ou (ce qui eſt autant) que B, qui eſt d'une même force: au lieu que par nôtre analyſe nous avons trouvé, qu'il ne devroit étre que $4\frac{1}{5}$ fois plus fort que luy. A quoi je répond, que quand ce raiſonnement ſeroit auſſi evident

qu'il ne l'eſt pas, il tire mal de la concluſion ce conſectaire qui eſt faux: *Par conſéquent* A *doit étre* &c. A, qui peut donner 45 à B, peut gagner 15 jeux contre un, s'il jouë à but avec luy, je l'accorde, car il en peut bien gagner $\frac{7114529}{134176}$ c'eſt à dire plus de 50, par le 15me art. mais il ne s'en ſuit pas de là, qu'il ſoit 15 fois plus fort, ſe pouvant faire qu'il gagne 15 jeux, ou même 50 jeux, si vous voulés, contre un, ſans qu'il ait gagné plus que 4 ou 5 fois plus de coups; à cauſe que tous les coups, que gagne B durant chaque jeu qu'il perd, ne ſont contés pour rien, lesquels pourtant aſſemblés feroient peut-étre la quatriéme Partie des coups d'A. Remarquéz donc, qu'il vaut mieux, meſurer les forces des jouëurs par le nombre des coups que chacun gagne, que par celuy des jeux ou des Parties qu'ils font, quand ils jouënt à but.

Dans l'article treiziéme l'on à recherché, de combien A devoit étre censé plus fort, s'il joüoit contre deux autres B & C, posé que leurs forces abſoluës fuſſent en raiſon de 3.2.1? Il y auroit bien des gens, qui pour répondre à cette queſtion ſe ſerviroient de l'analogie tirée du mélange des choſes: S'il y avoit par ex. trois ſortes de vin, dont le prix fuſſent en raiſon de 3.2.1, il eſt certain, qu'ayant mélé les deux plus petits enſemble en égale quantité, le prix du mélé ſera de $1\frac{1}{2}$, & par conséquent le prix du meilleur à celuy de l'autre, comme 3 à $1\frac{1}{2}$, ou comme 2 à 1. Tout de même, dis-je, pourroient ils penſer, que les deux jouëurs B & C qui jouënt de compagnie contre le troiſiéme A, ne paſſant que pour un jouëur, leur jeu ſe mélant quasi, & qu'ainsi la force de A doit auſſi étre double de celle des deux autres prix enſemble. D'autres raiſonneroient peut-étre comme cela: Puis que par l'hipotêſe A gagne trois coups, là où B n'en gagne que deux, & qu'il en gagne encore trois, là où C n'en fait qu'un; il s'enſuit, qu'il doit gagner ſix coups, lorsque les deux autres enſemble n'en font que $3 + 1 \infty 3$; & que par conséquent ſa force doit encore ſurpaſſer au double celle des autres, comme nous avons conclu par le prémier diſcours: Or cela eſt contraire au calcul du 13me article, qui nous a fait trouver le ſort de A plus que le double de celuy des autres. Je

puis

puis répondre en peu de mots à ce deux raiſonnemens: Pour le prémier, vous ſçavés, que les analogies ne prouvent rien; & pour l'autre, ſon paralogiſme paroit, en ce qu'on doit raiſonnablement ſuppoſer, que A jouë autant de fois ou plus ſouvent au plus foible qu'à B. & que ſuivant ce raiſonnement il s'en fait tout le contraire; parce que A jouëroit à B cinq coups, dont il gagneroit trois; & à C il ne jouëroit que quatre coups, dont il gagneroit encore trois: au lieu que nôtre calcul remplit parfaitement cette condition; car mettéz que A jouë 20 coups à B, il en doit gagner 12: s'il en jouë donc autant à C, il en doit gagner 15; ce qui fait en tout 27, & B & C gagnent les autres 13: mais s'il jouë trois fois autant, c'eſt à dire 60 coups, à C, il en doit gagner 45, leſquels joints au 12, qu'il gagne ſur B, font 57, & il reſte pour B & C les autres 23; ce qui eſt tout à fait conforme à ce que porte le calcul du 13me article.

Je finis, Monſieur, par cette reflexion: c'eſt qu'il eſt extrémement facile de ſe méprendre dans toutes ſes connoiſſances, ſi l'on n'y fait pas toujours une ſerieuſe attention: car les raiſonnemens, qu'on fait communément dans le monde, ne ſont pas meilleurs, que ceux que je viens de rapporter, mais ſouvant beaucoup pires: l'on voit tous le jours, que le plus ſçavans raiſonnent ſur de pures analogies; où s'ils s'imaginent de voir clair dans les choſes, ils prennent pour trés-évident ce qui ne l'eſt pas, & dont il n'y a que ceux, à qui l'uſage des Mathematiques a éclairé l'eſprit, qui ſoient capables d'en découvrir l'impoſture. Je ſuis &c.

ERRATA.

Pag. 41. lin. 12. 13. 14. dele c^n, *quibus contingere poſſit, ut in nulla* n *teſſerarum prodeat quod ſuſceptum eſt; & ſimili modo colligitur cuſus eſſe*

Pag. 70. lin. 24. in fin. pro in l. $2n$.

Pag. 71. lin. 9. pro bnc^m l. $b^n c^m$

Pag. 84. lin. pen. pro erit $2^n 1$ l. erit $2^n - 1$.

Pag. 92. lin. 2. poſt *conſtat* adde *Lemma propoſitum.*

Pag. 93. lin. 14. ab initio pro $\frac{b+a}{\ }$ l. $\frac{b+a}{r}$

& in fin. pro $nq--\frac{p}{r}--l--\frac{i}{r}--h--g$ lege $\frac{nq}{r}\,\frac{-p-l-i-h-g}{r}$.

Pag. 95. in fin. lin. 4. & init. lin. 5. lege $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4}$, ſic etiam in fine lin. 11. & init. lin. 12.

lege $\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}\ldots\overline{n-c+1}}{1.2.3.4\ldots\overline{c-1}}$

Pag. 106. lin. 28. pro $\frac{n.2.\overline{n-3}.\overline{n-4}\ldots\overline{n-c}}{1.2.3.4\ldots\overline{c-1}}$

lege $\frac{\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}\ldots\overline{n-c}}{1.2.3.4\ldots\overline{c-1}}$.

Pag. 142. lin. 27. pro $\frac{1.2.4}{1.3.5}$ l. $\frac{1.2.4}{3.3.5}$

Pag. 143. lin. 6. pro $\frac{1.2.4.4.16}{2.3.5.9.17}$ l. $\frac{1.2.4.8.16}{2.3.5.9.17}$.

Pag. 150. lin. 21. pro extra hanc l. extrahant.

Pag. 178. lin. 1. pro $\frac{2}{969}$ l. $\frac{20}{969}$.

Pag. 198. in medio pro $2n-3t18.$ l. $2n\overline{-3:}18$.

Pag. 203. lin. 5. pro $\frac{a}{b}-\frac{a}{b}-n\frac{c^n}{a^n}$ l. $\frac{a}{b}-\frac{a}{b}-n\frac{c^n}{a^n}$.

Ead. pag. lin. ult. pro $\frac{b.^{m.1}+c.^{-1}}{a}$ l. $\frac{b.^{m-1}+c.^{-1}}{a}$.

Lettre ſur les Parties du Jeu de Paume.

Pag. 8. lin. 4. pro $\frac{n3}{n3+nn+n+n+1}$ l. $\frac{n3}{n3+nn+n+1}$.

Pag. 24. lin. pen. pro $m+1\infty\frac{7348696}{124167}$ l. $m+1\infty\frac{7248696}{134167}$

ARTIS CONJECTANDI PARS PRIMA,

Complectens

Tractatum Hugenii de Ratiociniis in Ludo Aleæ,

Cum Annotationibus

JACOBI BERNOULLJ.

CHRIST. HUGENII ad FRANC. SCHOOTENIUM *Præfatio.*

CUm in editione elegantiſſimorum ingenii Tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clariſſime, id inter cœtera Te ſpectare ſciam, ut varietate rerum, quarum tractationem inſtituiſti, oſtendas quàm latè ſe protendat divina Analytices ſcientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm propoſito Tuo inſervire poſſe, quæ de Aleæ Ratiociniis

conſcripſimus; quantò enim minùs rationis terminis comprehendi poſſe videbantur, quæ fortuita ſunt atque incerta, tantò admirabilior ars cenſebitur, cui iſta quoque ſubjacent. Quare cùm in Tui gratiam primùm illa exponenda ſuſceperim, Tuque digna exiſtimes, quæ ſimul cum ſubtiliſſimis Tuis inventis in lucem exeant, adeò Tibi non refragabor, ut etiam è re meâ eſſe exiſtimem hâc potiſſimùm ratione ipſa in manus hominum pervenire. Quippe cùm in re levi ac frivolâ operam collocâſſe videri alioqui poſſem, non tamen prorſùs utilitatis expers ac nullius pretii cenſebitur, quod Tu veluti inter Tua adoptaveris, nec ſine multo labore è vernaculâ linguâ noſtrâ in Latinam converteris. Quanquam, ſi quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cæperit, non dubito quin continuò reperturus ſit, rem non, ut videtur, ludicram agi, ſed pulchræ ſubtiliſſimæque contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minùs profundæ indaginis viſum iri confido, quàm quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquantò plus habitura, cùm non, ſicut illa, in nudâ numerorum conſideratione terminentur. Sciendum verò, quòd jam pridem inter præſtantiſſimos totâ Galliâ Geometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hâc in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibusque quæſtionibus ſe invicem exercere ſoliti, methodum ſuam quisque occultam retinuêre, adeò ut à primis elementis univerſam hanc materiam evolvere mihi neceſſe fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in reſolvendis Problematîs pulchrè nobis convenire ſæpenumerò expertus ſum. Horum Problematum non-

nulla

nulla in fine operis addidiſſe me invenies, omiſsâ tamen analyſi, cum quòd prolixam nimis operam poſcebant, ſi perſpicuè omnia exequi voluiſſem, tum quòd relinquendum aliquid videbatur exercitationi noſtrorum, ſi qui erunt, Lectorum. *Vale.*

DE RATIOCINIIS in Ludo Aleæ.

Etſi luſionum, quas ſola ſors moderatur, incerti ſolent eſſe eventûs, attamen in his, quantò quis ad vincendum quàm perdendum propior ſit, certam ſemper habet determinationem. Ut ſi quis primo jactu unâ teſſerâ ſenarium jacere contendat, incertum quidem an vincat; at quantò veriſimilius ſit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum eſt, calculoque ſubducitur. Ita quoque, ſi cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis luſibus conſtet victoria, atque ego jam unum luſum vicerim, incertum adhuc uter noſtrûm prior tertii victor ſit evaſurus. Verùm quanti exſpectatio mea, & contra quanti illius, æſtimari debeat, certiſſimo ratiocinio conſequi licet, atque hinc definire, ſi ludum uti eſt imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depoſitum eſt mihi quàm adverſario meo tribuenda eſſet: vel etiam ſi quis in locum ſortemque meam ſuccedere cupiat, quo pretio me eam ipſi vendere æquum ſit. Atque hinc innumeræ quæſtiones exoriri poſſunt inter duos, tres, pluréſve colluſores. Cumque minimè vulgaris ſit hujusmodi ſupputatio, & ſæpè utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda ſit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam ſive teſſeras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æſtimandam eſſe cujusque ſortem ſeu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum ſi habeat, poſſit denuò ad ſimilem ſor-

tem ſive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, ſi quis me inſcio alterâ manu 3 ſolidos occultet, alterâ 7 ſolidos, mihique optionem det ex utrâ manu ſolidos accipere mâlim; hoc tantundem mihi valere dico, ac ſi 5 ſolidi mihi dentur. Quoniam quinque ſolidos habens, denuò eò pervenire poſſum, ut æquam expectationem nanciſcar ad 3 vel 7 ſolidos obtinendos: idque æquo luſu contendens.

Propositio I.

Si *a* vel *b* expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere poſſit, expectatio mea dicenda eſt valere $\frac{a+b}{2}$.

Ad hanc regulam non ſolùm demonſtrandam, verùm etiam primitùs eruendam poſito *x* pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quùm *x* habeo, rurſus ad ſimilem ſortem pervenire poſſe, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque luſus eſſe talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quiſque deponat *x*, ac ut victor victo traditurus ſit *a*. Hic autem luſus juſtus eſt, & patet me hâc ratione æquam habere ſortem ad obtinendum *a*, ſi luſum perdam ſcilicet; aut $2x-a$, ſi vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depoſitum eſt, de quo alteri erogandum eſt *a*. Quòd ſi autem $2x-a$ tantundem valeret atque *b*, æqua mihi ſors obtingeret ad *a* quàm ad *b*. Pono itaque $2x-a \propto b$, & fit $x \propto \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonſtratio facilis eſt. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ poſſum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut vincens victo ſit traditurus *a*. Quâ ratione ſimilis expectatio mihi obtinget ad obtinendum *a*, ſi perdam, aut ad obtinendum *b*, ſi vincam; tum enim obtineo $a+b$, id nempe quod depoſitum eſt, alterique inde concedo *a*.

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua ſors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propoſitionem valet 5; & certum eſt me 5 habentem rurſus ad eandem expectationem pervenire poſſe. Si enim

cum

cum alio certans 5 deponam, atque ille ſimiliter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri ſit daturus 3: erit hic luſus omnino æquus, & patet mihi æquam obtingere ſortem ad obtinendum 3, ſi perdam; aut 7, ſi vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

Annotationes.

AUctor hujus Tractatûs in fine Proœmii ſui generaliter, in hâc verò & duabus ſequentibus Propoſitionibus ſpecialiùs totius Artis fundamentum exponit, quod cùm plurimùm interſit ut rectè intelligatur, conabor illud alio magis populari & ad cujusque captum accommodato ratiocinio demonſtratum dare, hoc tantùm poſito ſeu axiomate ſeu definitione: quòd *unusquisque tantundem expectet, vel expectare dicendus ſit, quantum infallibiliter obtinebit.* Nimirum ad primam Propoſitionem: Cogitemus, quendam alterâ manu occultâſſe 3 ſolidos ſeu a, alterâ 7 ſolidos ſeu b; alterique mecum permittere, ut unus quod in unâ, alter quod in alterâ manu eſt, accipiamus: quâ ratione fiet, ut ſimul ambo infallibiliter conſecuturi ſimus, ac proinde expectare debeamus, id quod in utrâque manu reconditum eſt, nempe 10 ſolidos ſeu $a+b$. Sed concedendum quoque eſt, utrumque noſtrûm æquale jus habere in hoc quod expectamus; quare conſequitur, expectationem totalem in duas æquas portiones dividendam eſſe, & cuique tribuendum ſeorſim dimidium expectationis totalis, id eſt, 5 ſeu $\frac{a+b}{2}$.

Coroll. Patet hinc, ſi in unâ manu occultaverit aliquid ſeu a, in alterâ nihil, fore cujusque expectationem ſeorſim illius alicujus dimidium, ſeu $\frac{1}{2}a$.

Schol. Ex dictis colligi poteſt, vocabulum *Expectationis* non ſumi hîc ſenſu vulgari, quo communiter expectare vel ſperare dicimur quod omnium optimum eſt, licèt nobis pejus accidere poſſit; ſed quatenùs ſpes noſtra impetrandi optimum temperata & imminuta eſt metu conſequendi pejus: adeò ut per valorem ejus ſemper ſignificetur intermedii quidpiam inter optimum quod ſperamus, & peſſimum quod metuimus; quod hîc & in ſequentibus ubique eſt intelligendum.

PROPOSITIO II.

SI a, b, vel c expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere poſſit, expectatio mea æſtimanda eſt $\frac{a+b+c}{3}$.

Ad quod rurſus inveniendum, ponatur, ut ante, x pro valore expectationis meæ. Oportet ergò me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire poſſe juſto luſu. Ponatur luſus eſſe talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quisque noſtrûm trium deponat x, & ut cum uno hoc pactum aggrediar, ſi ipſe victor evadat, mihi ſit daturus b, & ego ipſi traditurus ſim b, ſi idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus ſit c, aut ego ipſi ſim daturus c, ſi ego vincam. Et patet hunc ludum juſtum eſſe. Æquam autem hâc ratione ſortem habebo ad obtinendum b, ſi nimirum primus vincat, aut c, ſi ſecundus vincat, aut etiam $3x-b-c$, ſi ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depoſitum eſt, de quo uni concedo b, & alteri c. Quòd ſi $3x-b-c$ æquale fuerit ipſi a, eadem mihi obtingeret expectatio ad obtinendum a, quæ ad b, aut ad c. Pono itaque $3x-b-c \infty a$, & fit $x \infty \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, ſi ad a, b, c, aut d æqua ſors mihi obtingat, id tanti valoris eſſe, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

Annotat.

Aliter ſic demonſtrabitur: Fingamus, tres eſſe loculos, in quorum uno reconditum ſit a, in altero b, in tertio c, mihique cum duobus aliis poteſtatem fieri, ut quisque pro ſe loculum accipiat, ſervetque quod inibi repererit: ſic fiet, ut omnes tres accipiamus omnes loculos, habeamusque quicquid in iis reconditum eſt, ſcil. $a+b+c$; unde, cùm dici nequeat, unum altero potiorem ſpem vel expectationem habere, conſequens eſt uniuscujusque expectationem ſeorſim æquivalere tertiæ parti hujus aggregati, vid. $\frac{a+b+c}{3}$. Eodem mo-

do, ſi

do, ſi 4 ſint loculi, in quibus abſcondita ſint *a*, *b*, *c* & *d*, mihique unus eorum in ſortem cedere debeat, cenſebitur mea expectatio æquare 4^{tam} partem totius aggregati, ſive $\frac{a+b+c+d}{4}$. Sic ſi 5 ſint loculi, erit mea expectatio $\frac{a+b+c+d+e}{5}$, &c.

Cor. Patet etiam, ſi in uno pluribusvé loculis nihil ſit abſconditum, quòd tum ſimiliter expectatio mea, ejus quod in reliquo vel reliquis continetur, futura ſit pars tertia, ſi loculi ſint tres, vel quarta, ſi 4, vel 5ta ſi 5, &c.

PROPOSITIO III.

SI numerus caſuum, quibus mihi eveniet *a*, ſit *p*; numerus autem caſuum, quibus mihi eveniet *b*, ſit *q*, ſumendo omnes caſûs æquè in proclivi eſſe: expectatio mea valebit $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Ad hanc regulam eruendam, ponatur rurſus *x* pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cùm *x* habeo, ad eandem expectationem pervenire poſſe, ut ante, juſto luſu. Ad hoc autem tot colluſores ſumam, ut unà mecum numerum ipſius $p+q$ efficiant, quorum deponat quisque *x*, ita ut depoſitum ſit $px+qx$, & quisque ſibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hiſce colluſoribus, quot indicat numerus *q*, ſigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi ſit daturus *b*, aut ego contra ipſi idem *b*, ſi vincam. Similiter cum reliquis colluſoribus, conſtituentibus $p-1$ ſigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi ſit daturus *a*, & ego tantundem (*a* ſcilicet) ipſi, ſi ego vincam. Et patet hunc luſum hâc conditione juſtum eſſe, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc *q* expectationes habere ad *b*, & $p-1$ expectationes ad *a*, & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px+qx-bq-ap+a$, tunc enim obtineo $px+qx$, id quod depoſitum eſt, de quo tradere debeo *b* unicuique *q* luſorum, & *a* unicuique $p-1$ luſorum, quæ ſimul conficiunt $bq+ap-a$. Si itaque $px+qx-bq-ap+a$ æquale eſſet ipſi *a*, haberem *p* expectationes ad *a*, (quandoquidem jam $p-1$ expectationes

tiones ad id habebam) & q expectationes ad b, & ſic ad priorem meam expectationem rurſus perveniſſem. Quocircà pono $px + qx - bq - ap + a \propto a$, & ſit $x \propto \frac{ap + bq}{p + q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio poſitum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile eſt oſtendere, me, ſi 11 habeam, rurſus ad eandem expectationem pervenire poſſe. Ludens enim contra 4 alios, & quisque noſtrûm quinque deponens 11, cum duobus ex illis ſigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi ſit daturus 8, aut ego ipſi idem 8, ſi vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi ſit daturus 13, aut ego ipſi tantundem, ſi ego vincam. Qui quidem luſus juſtus eſt. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum ſi alteruter eorum, qui mihi 8 promiſerunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum ſi alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut ſi ipſe ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depoſitum, id eſt, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

Annotat.

Aliter ita: Ponamus, tot unà mecum eſſe colluſores, quot ſunt in univerſum caſûs, nimirum $p + q$, ſingulisque ſingulos evenire caſûs; quod fit, ſi totidem concipiantur loculi, & in ſingulis reconditum intelligatur, quantum unoquoque caſu acquiritur, videl. in ſingulis p loculorum a, & in ſingulis q loculorum b; ſinguli jam colluſores accipiant ſingulos loculos, univerſi ergò accipient omnes, obtinebuntque infallibiliter quicquid in loculis reconditum eſt, id eſt, $pa + qb$. Igitur cùm omnes expectent æqualiter, diſtribuendum erit, quod univerſi accipient, per numerum colluſorum ſeu caſuum, ſic ut ſingulorum expectatio fiat $\frac{pa + qb}{p + q}$. Atque eâdem ratione oſtendetur, ſi mihi p caſibus eveniat a, q caſibus b, & r caſibus c, ſortem meam fore $\frac{pa + qb + rc}{p + q + r}$.

Coroll.

Coroll. 1. Conſtat hinc primò, ſi p caſibus mihi eveniat a, & q caſibus nihil, expectationem meam fore $\frac{pa}{p+q}$.

2. Conſtat deinde, ſi numeri caſuum recipiant communem diviſorem, poſſe valorem expectationis reduci ad minores terminos; ut, ſi a obtingat mihi caſibus mp, & b caſibus mq, fiet expectatio mea juxta regulam $\frac{mpa+mqb}{mp+mq}$, quæ factâ diviſione per m æquivalet huic $\frac{pa+qb}{p+q}$.

3. Si habeam p casûs ad obtinendum a, q casûs ad b, & r ad c, tantundem hoc mihi valet, ac ſi p & q caſibus in unum conflatis, haberem $p+q$ casûs ad $\frac{pa+qb}{p+q}$, & r casûs ad c; quia utroque modo per regulam invenitur ſors mea $\frac{pa+qb+rc}{p+q+r}$.

4. Si habeam p casûs ad a, q ad b, & r casûs ad permanendum in eo ſtatu, in quo ſum, ſive ad retinendam priſtinam meam ſortem, erit ſors iſta $\frac{pa+qb}{p+q}$, eadem planè quam haberem, ſi nullus r caſuum adeſſet. Nam poſito x pro valore ejus, habeo per hyp. p casûs ad a, q ad b, & r ad x, quod ſortem meam per regulam efficit $\frac{pa+qb+rx}{p+q+r}$; unde cùm hæc mea ſors vocetur x, erit $x \infty \frac{pa+qb+rx}{p+q+r}$, hoc eſt, factâ multiplicatione, $px+qx+rx \infty pa+qb+rx$, & deleto rx, $px+qx \infty pa+qb$, ſeu denique $x \infty \frac{pa+qb}{p+q}$.

5. Si habeam p casûs ad obtinendum a (quidpiam cujus ego ſemiſſem contuli), & q casûs ad obtinendum nihil, expectatio $\frac{pa}{p+q}$, quæ per Cor. 1. hujus invenitur, totum depoſitum reſpicit, & partem ſignificat quæ mihi ex illo debetur, non quantitatem ſolius lucri vel damni: de hoc enim ſolo ſi quæſtio ſit, conſidero, quòd dum obtineo depoſitum a, lucrifacio tantùm $\frac{1}{2}a$; & dum obtineo nihil depoſiti, perdo $\frac{1}{2}a$, hoc eſt, acquiro $-\frac{1}{2}a$; unde ſors mea hoc ſenſu accepta ſit $\frac{p.\overline{a:2}+q.\overline{-a:2}}{p+q} \infty \frac{\overline{p-q}.\overline{a:2}}{p+q}$, & innuit lucrum, ſi p ſuperet q; damnum, ſi hæc ſuperet illam.

 6. Si

6. Si habeam p caſûs ad acquirendum a, & q caſûs ad obtinendum b, quorum quidem ego nihil contulero, attamen jactus aleæ mihi redimendus ſit pretio n, expectatio mea $\frac{pa+qb}{p+q}$ iterum non tota in lucro ponenda eſt, ſed priùs diminuenda valore n. Etenim cùm alteri do n, & ipſe mihi viciſſim reddit a vel b, perinde eſt, ac ſi ego nihil darem, acciperem verò tantùm $a-n$, vel $b-n$; id quod efficit expectationem meam ita reſtrictam $\frac{p.\overline{a-n}+q.\overline{b-n}}{p+q}$ $\infty \frac{pa+qb}{p+q}-n$, quæ rurſus vel lucrum vel damnum ſignificat, prout pars affirmata præpollet negatæ, aut hæc illi.

Schol. Perſpicuum eſt ex calculi hujus conſideratione, magnam illi intercedere affinitatem cum Regulâ Arithm. *Alligationis* dictâ, quâ res diverſi pretii in datâ quantitate miſcentur, & quæritur pretium rei mixtæ; aut potiùs calculum utrinque planè eundem eſſe. Sicut enim ſumma productorum ex quantitatibus ſingularum miſcibilium in ſua reſpectivè pretia, diviſa per aggregatum omnium miſcibilium, exhibet pretium quæſitum, quod ſemper medium eſt inter pretia extremorum: ita ſumma productorum ex numeris caſuum in id quod quovis caſu acquiritur, diviſa per numerum omnium caſuum, oſtendit valorem expectationis, qui proinde ſemper intermedius erit inter maximum & minimum quod acquiri poteſt. Unde ſi iidem numeri aſſumantur, ibi pro quantitate miſcibilium, eorumque pretiis; hîc pro caſibus, & eo quod quovis caſu obtinetur; idem quoque numerus denotabit ibi pretium rei mixtæ, & hîc expectationem. Ex. gr. ſi 3 canthari vini pretii 13 miſceantur cum 2 cantharis pretii 8; multiplicatis 3 per 13 & 2 per 8, exurgit pretium omnium cantharorum 55, quo diviſo per 5 numerum cantharorum, habetur 11 pretium unius canthari mixti: quanta quoque juxtà regulam expectatio cujuspiam æſtimanda eſt, qui 3 habuerit caſûs ad 13, & 2 ad 8.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SUmpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depoſitum eſt, lucretur, & me jam bis viciſſe, alterum verò ſemel. Scire cupio, ſi luſum proſequi non velimus, ſed pecuniam, de quâ certamus, prout æquum eſt, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Ut igitur ad primò propoſitam quæſtionem veniamus, nimirum, de faciendâ diſtributione inter diverſos colluſores, quando eorum ſortes inæquales ſunt, opùs eſt ut à facilioribus incipiamus.

Primò conſiderare oportet luſûs, qui utrobique deficiunt. A
Certum enim eſt, ſi inter nos convenerit, verbi gratia, ut quod depoſitum eſt lucretur is, qui priùs vigeſies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo caſu ſortem meam, quantò hîc melior eſt, ubi à tribus luſibus binos conſequutus ſum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodò luſus ſed ipſi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum eſt quid fieret, ſi in luſu pergeremus. Certum enim eſt, ſi primum ludum vincerem, me præſcriptum numerum impleturum & omne depoſitum conſecuturum, id quod vocetur a. Quòd B
ſi autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriusque ſors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifeſtum autem eſt, me æquam habere ſortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua ſit expectatio ad obtinendum a aut $\frac{1}{2}a$: quod ipſum per 1mam Propoſitionem tantum eſt ac ſi utriusque ſortis dimidium, id eſt, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo colluſori $\frac{1}{4}a$, quæ ipſius C
portio ſtatim ab initio eodem modo reperiri potuiſſet. Unde patet, eum, qui ludum meum in ſe recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo D
tradere debere, ac proinde ſemper tria contra unum deponere eum E
poſſe, qui unum ludum vincere contendat, priusquàm alter duos vincat.

Annotat.

A *Primò conſiderare oportet luſûs, qui utrobique deficiunt.*] Adeoque in computandis ſortibus ſolummodò futurorum luſuum, nulla præteritorum habenda eſt ratio; cùm pro unoquoque ſequentium luſuum nulla major ſit probabilitas, ut fortuna iisdem favere pergat, quibus favit anteà, quàm iis qui omnium fuêre infortunatiſſimi: quod obſervandum contra ridiculam plurimorum opinionem, qui fortunam ut neſcio quem habitum conſiderant, qui aliquandiu in homine permaneat, eique jus quaſi tribuat ſperandi in poſterum ſimilem fortunam.

B *Id quod vocetur a.*] Per lit. *a* non ſolùm cum Auctore intelligere poſſumus depoſitam pecuniam, quæ inter colluſores pro ratione ſortium diſtribui poteſt; ſed etiam in genere omne illud, quòd licèt indiviſum eſt in ſe, concipi tamen poteſt ut diviſibile pro numero caſuum, quibus acquiri vel amitti, effici vel non effici poteſt, ut in ultimâ libri parte fuſiùs oſtendetur: putà, præmium quodcunque, laureola, victoria, ſtatus vel conditio perſonæ aut rei, munus quoddam publicum, opus quodcunque ſuſceptum, vita vel mors, &c. Ita ſi duobus maleficis ex ſpeciali gratiâ Principis æquâ ſorte de vitâ decertandum ſit, utervis eorum habere cenſebitur per I. Prop. $\frac{1}{2}$ vitæ & $\frac{1}{2}$ mortis, ſic ut ejuſmodi homo etiam in proprio ſenſu ſemi-vivus vel ſemi-mortuus nuncupari poſſit.

C *Et relinquitur alteri meo colluſori* $\frac{1}{4}a$.] Hoc eſt, reſiduum totius depoſiti *a*; quia ſcil. finito certamine ambo ſimul infallibiliter habituri ſumus integrum *a*: at ſi fieri quodam caſu poſſit, ut ambo ludentes impetrent plus minúsve integro *a*, evidens eſt, quòd tunc unius expectatio alterius expectationem nequeat complere ad *a*. Ex. gr. Si duo laqueo digni ludere cogantur teſſerâ eâ lege, ut qui pauciora puncta jecerit ſuſpendatur, altero manente vivo; ſi verò eundem jaciant punctorum numerum, ut ambo vitâ donentur; reperitur pro unius expectatione, ut ſuo loco patebit, $\frac{7}{12}a$ ſeu $\frac{7}{12}$ vitæ; unde tamen non ſequitur alterius expectationem fore tantùm $\frac{5}{12}$ vitæ: cùm enim hìc ſortes manifeſtè ſint æquales, expectabit & iſte $\frac{7}{12}$ vitæ, proinde uterque ſimul $\frac{7}{6}$ vitæ, hoc eſt, plus

plus integrâ vitâ; quod inde fit, quia nullus quidem *caſus eſt*, quo non finitâ aleâ unus minimùm ſuperſtes maneat, poſſunt tamen nonnullis caſibus ambo vivi ſupereſſe.

Quæ ipſius portio ſtatim ab initio &c.] Nempe hâc ratione: Si colluſor meus proximum ludum vincat, æquata erit utriusque *ſors*, proinde cedet cuique $\frac{1}{2}a$: ſin ego vincam, obtinebit ille nihil. Cùm igitur pari facilitate obtinere poſſit $\frac{1}{2}a$ vel nihil, expectatio ejus per Coroll. 1. Prop. III. dicenda eſt $\frac{1}{4}a$.

Ac proinde ſemper tria contra unum &c.] Oſtendendum, quòd is qui tres habet casûs ad vincendum, & unum ad perdendum, ſeu qui tres quartas partes depoſiti expectat, tria poſſit deponere contra unum. Hunc in finem ſolummodò ſupponi debet, eum trium colluſorum vicem ſuſtinere. Etenim ſi ſint 4 colluſores, qui æquâ ſorte ludant, & quorum ſinguli deponant 1, expectabit unusquisque id ipſum quod depoſuit, hoc eſt, 4^{tam} partem totius depoſiti, per Cor. 2. Prop. III. adeoque terni eorum quivis tres quartas partes depoſiti, & quartus non niſi $\frac{1}{4}$. Sed quia illi tres quoque tria depoſuerunt, cùm quartus tantùm depoſuerit unum, patet omnino juſtum eſſe, ut is, qui cupit in ſortem trium ſuccedere, hoc eſt, triplò plus expectare alio, triplò quoque plus deponat. Aliter ita: Qui tres habet casûs ad vincendum, & unicum ad perdendum, is toties ter vincere poteſt, quoties alter ſemel tantùm; proinde ſi luſus juſtus eſſe debet, oportet ut tribus ille vicibus tantundem lucri reportet, quantum alter unicâ vice; quod fieri nequit, niſi tria deponat contra unum. Et ſic in genere oſtendetur, quòd quantò quis altero potiorem ad vincendum expectationem habet, tantò etiam plus eum deponere juſtum ſit, ſi æquâ ſorte contendere velint.

PROPOSITIO V.

POnamus unum mihi deficere ludum & colluſori meo tres luſûs. Oportet hîc facere diſtributionem.

Advertamus itaque rurſus, in quo eſſemus ſtatu, ſi ego vel ip primum vinceret luſum. Si ego vincerem, obtinerem depoſitun id eſt, *a*; quòd ſi autem ille primum ludum vinceret, deficerent iı

duo luſûs & mihi unus, ac proinde in eodem ſtatu eſſemus, qui in præcedenti Propoſitione poſitus fuit, mihique obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi oſtenſum eſt. Itaque pari facilitate vel a mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum eſt, per 1mam Propoſitionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ colluſori meo; ita ut mea ſors ad ſortem illius ſe habeat, ſicut 7 ad 1.

Quemadmodùm autem ad hunc calculum requiſitus eſt præcedens, ita rurſus hicce inſervit ſequenti: nimirum, ſi ponamus mihi unum ludum deficere & colluſori meo 4or luſûs. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{15}{16}$ iſtius quod depoſitum eſt, & ipſi $\frac{1}{16}$.

Annotat.

Ex progreſſione harum fractionum, $\frac{3}{4}a$, $\frac{7}{8}a$, $\frac{15}{16}a$, quæ per præced. & hanc Propoſitionem inventæ ſunt, porrò infertur, ſi colluſori meo deficiant ludi 5, fore ſortem meam $\frac{31}{32}a$: ſi ſex, $\frac{63}{64}a$: ſi ſeptem, $\frac{127}{128}a$; & in genere, ſi mihi deficiat unus luſus & colluſori meo ludi quotcunque, meam ſortem fore ad ſortem illius in eâ ratione, quam habet, demtâ unitate, productum binarii toties poſiti & multiplicati in ſe, quoties indicat numerus luſuum alteri deficientium, ad unitatem.

PROPOSITIO VI.

POnamus mihi deficere duos luſûs & colluſori meo tres luſûs.

Fiet itaque primo luſu; vel ut mihi unus luſus deficiat & ipſi tres (unde mihi per præcedentem Propoſitionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique noſtrûm adhuc duo luſûs deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem ſic utrique æqua ſors futura eſt. Eſt mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua ſit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{11}{16}a$, per 1mam Propoſitionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depoſitum eſt, & colluſori meo 5 partes.

PRO-

PROPOSITIO VII.

POnamus mihi deficere duos luſûs & colluſori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, ſi primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, ſi eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi ſors obtingat ad $\frac{15}{16}a$ aut $\frac{11}{16}a$, id quod tantum valet ac $\frac{13}{16}a$, per 1mam Propoſitionem. Unde patet, eum meliorem habere ſortem, qui duos luſûs vincere debet dum alter quatuor, quàm eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim poſteriori caſu, nimirum ipſius 1 ad 2, portio mea, per 4tam Propoſitionem, eſt $\frac{3}{4}a$, quæ minor eſt quàm $\frac{13}{16}a$.

Annotat.

Unde patet eum meliorem &c.] Sic adhuc meliorem ſortem habet, qui tres luſûs vincere debet, dum alter ſex; reperitur enim ejus portio $\frac{219}{256}a$, major quàm $\frac{13}{16}a$. Ita etiam, qui unum ludum vincere ſuſcipit dum alius quatuor, non parem ſubit fortunam cum illo, qui duos vincere debet dum alter octo; ſed cum illo, qui duos vincere tenetur dum alter ſex: quanquam nemo fortaſſis eſt, qui ſibi non perſuaderet, eandem inter ſortes rationem obtinere debere, ubi numeri luſuum utrobique deficientium eandem quoque inter ſe rationem ſervant; niſi nos calculus aliud docuiſſet. Quo ipſo proin monemur, ut cauti ſimus in judicando, nec ratiocinia noſtra ſuper quâcunque ſtatim analogiâ in rebus deprehensâ fundare ſueſcamus; quod ipſum tamen etiam ab iis, qui vel maximè ſapere videntur, nimis frequenter fieri ſolet.

Cœterùm lubet hîc Tabulam adjicere pro duobus colluſoribus, qualem infra in Propoſ. IX. pro tribus ſubjungit Auctor:

Tabu-

Tabula pro 2 colluſoribus.

Luſûs deficientes Colluſoris A		Colluſoris B 1	2	3	4	5	6	7
1	Sortes Colluſoris A.	1 : 2	3 : 4	7 : 8	15 : 16	31 : 32	63 : 64	127 : 128
2		1 : 4	4 : 8	11 : 16	26 : 32	57 : 64	120 : 128	247 : 256
3		1 : 8	5 : 16	16 : 32	42 : 64	99 : 128	219 : 256	466 : 512
4		1 : 16	6 : 32	22 : 64	64 : 128	163 : 256	382 : 512	848 : 1024
5		1 : 32	7 : 64	29 : 128	93 : 256	256 : 512	638 : 1024	1486 : 2048
6		1 : 64	8 : 128	37 : 256	130 : 512	386 : 1024	1024 : 2048	2510 : 4096
7		1 : 128	9 : 256	46 : 512	176 : 1024	562 : 2048	1586 : 4096	4096 : 8192
8		1 : 256	10 : 512	56 : 1024	232 : 2048	794 : 4096	2380 : 8192	6476 : 16384
9		1 : 512	11 : 1024	67 : 2048	299 : 4096	1093 : 8192	3473 : 16384	9949 : 32768

Tabella hæcce leviſſimo negotio quouſque opus fuerit continuabitur, in ſupremâ quidem ſerie transverſali per ea quæ ad Propoſ. 5 annotata ſunt; in primâ ſerie perpendiculari per continuam biſectionem dimidii; in locis intermediis per dimidiationem ſummæ duarum areolarum immediatè præcedentium in eâdem ſerie perpendiculari & transverſali; cujus conſtructionis ratio ex dictis plus ſatis perſpicua eſt. Quomodo autem expectationes duorum ludentium absque continuatione Tabellæ indefinitè ad quotvis deficientes luſûs exhiberi poſſint, infra in Appendice Cap. 4. Part. II. oſtendetur.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

NUnc verò ponamus tres eſſe colluſores, quorum primo ut & ſecundo unus luſus deficiat, ſed tertio duo luſûs.

Ut igitur inveniatur primi pars, rurſus advertendum eſt, quid ipſi deberetur, ſi vel ipſe vel alter reliquorum duorum primum luſum vinceret. Si ipſe vinceret, haberet depoſitum, id quod ſit a. Quòd ſi ſecundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam ſecundus ſic luſui finem impoſuiſſet. At ſi tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret luſus, ideoque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{3}a$. Et fit primo una expectatio ad a, una ad o, & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æquè facilè contingere poteſt cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipſi tantundem valet ac $\frac{4}{9}a$, per 2dam Propoſitionem. Et fit ſimiliter ſecundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars ſeparatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari. G

Annotat.

Cujus pars ſeparatim etiam inveniri potuerat.] Nempe hoc pacto: Si ipſe ſequentem ludum vinceret, expectatio ejus foret $\frac{1}{3}a$; ſed ſi vel primus vel ſecundus proximi ludi victor evaderet, tertius nihil haberet: quare unum caſum habet ad $\frac{1}{3}a$, & duos ad o; id quod ipſi per Coroll. 1. Prop. III. valet $\frac{1}{9}a$. G

PROPOSITIO IX.

UT tot colluſorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores luſûs deficiunt, cujusque pars inveniatur, conſiderandum eſt, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, ſi vel ipſe, vel quilibet reliquorum primum ſequentem ludum vinceret. Hæ autem partes ſi in unam ſummam colligantur, & aggregatum per numerum colluſorum dividatur, quotiens oſtendet unius quæſitam partem.

Ponamus, tres eſſe colluſores A, B, & C, & ipſi A unum luſum deficere, ipſi B duos luſûs, & ipſi C ſimiliter duos luſûs. Invenire oportet, quid ipſi B, ejus quod depoſitum eſt, debeatur. Id quod vocetur q.

Primò examinandum eſt, quid ipſi B deberetur, ſi vel ipſe, vel A, vel C primum ſequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem impoſuiſſet, ac per conſequens ipſi B deberetur o. Si ipſe B vinceret, deficeret illi adhuc unus luſus, & ipſi A unus luſus, at ipſi C duo luſûs. Quocirca ipſi B hoc in caſu deberetur $\frac{4}{9}q$, per 8vam Propoſitionem.

Denique ſi C primum ſequentem ludum vinceret, tunc ipſis A & C ſingulis unus deficeret luſus, ſed ipſi B duo luſûs, ac per conſequens ipſi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propoſitionem 8vam. Nunc autem in unam ſummam colligendum eſt, id quod in tribus hiſce caſibus ipſi B deberetur: nimirum, o, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum ſumma eſt $\frac{5}{9}q$. Quod ipſum diviſum per 3, numerum colluſorum, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipſius B quæſita pars eſt. Demonſtratio autem hujus patet ex 2dâ Propoſitione. Quoniam enim B æquam habet ſortem ad obtinendum o, $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2dam Propoſitionem tantundem ac $o+\frac{4}{9}q+\frac{1}{9}q:3$, id eſt, $\frac{5}{27}q$. Et certum eſt, hunc diviſorem 3 eſſe numerum colluſorum.

Ut autem inveniatur, quid cuipiam debeatur in quolibet caſu, videlicet ſi vel ipſe vel aliquis reliquorum primum ſequentem ludum vincat: oportet ſimpliciores casûs primò inveſtigare, & horum medio ſequentes. Nam ſicut hic ultimus caſus ſolvi non potuit, priusquàm ille octavæ Propoſitionis calculo ſubductus eſſet, in quo deficientes luſûs erant 1, 1, 2, ita etiam cujusque pars ſupputari nequit in tali caſu, ubi deficientes luſûs ſunt 1, 2, 3, quin primùm calculo ſubductus ſit caſus deficientium luſuum 1, 2, 2, quemadmodùm jam fecimus, & prætereà ille, in quo luſus deficientes ſunt 1, 1, 3; qui ſimiliter per 8vam Propoſitionem ſupputari potuiſſet. Atque hoc quidem pacto conſequenter ſupputare licet casûs omnes, qui in ſequenti tabulâ comprehenduntur, & infinitos alios.

Tabu-

Tabula pro 3 colluſoribus.

Luſus qui ipſis deficiunt	1. 1. 2	1. 2. 2	1. 1. 3	1. 2. 3
Eorum partes	4. 4. 1	17. 5. 5	13. 13. 1	19. 6. 2
	9	27	27	27

Luſus qui ipſis deficiunt	1. 1. 4	1. 1. 5	1. 2. 4	1. 2. 5
Eorum partes	40. 40. 1	121. 121. 1	178. 58. 7	542. 179. 8
	81	243	243	729

Luſus qui ipſis deficiunt	1. 3. 3	1. 3. 4	1. 3. 5
Eorum partes	65. 8. 8	616. 82. 31	629. 87. 13
	81	729	729

Luſus qui ipſis deficiunt	2. 2. 3	2. 2. 4	2. 2. 5	2. 3. 3	2. 3. 4	2. 3. 5
Eorum partes	34. 34. 13	338.338.53	353.353.23	133. 55. 55	451.195.83	1433.635.119
	81	729	729	243	729	2187

DE TESSERIS.

QUod ad Teſſeras attinet, de iis hæ quæſtiones proponi poſſunt: videlicet, quotâ vice unâ teſſerâ ſenarium jacere periclitandum ſit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quota vice duos ſenarios duabus teſſeris, aut tres ſenarios tribus teſſeris jacere ſit tentandum. Et plures aliæ hujuſmodi quæſtiones.

Ad quas ſolvendas advertendum eſt. Primò unius teſſeræ ſex eſſe jactûs diverſos, quorum quivis æquè facilè eveniat. Sumo enim teſſeram habere figuram cubi perfectam. Porrò duarum teſſerarum 36 eſſe diverſos jactûs, quorum ſimiliter quivis æquè facilè obtingere poteſt. Nam ratione cujuſque jactûs unius teſſeræ poteſt unus ſex jactuum alterius teſſeræ ſimul contingere. Et ſexies 6 efficiunt 36 jactûs. Item trium teſſerarum eſſe 216 jactûs diverſos. Nam ratione cujuſque 36 jactuum duarum teſſerarum poteſt unus ſex jactuum, qui in 3tiâ ſunt, evenire. Et ſexies 36 efficiunt 216 jactûs. Eodem modo patet, quatuor teſſerarum jactûs eſſe ſexies 216, id eſt, 1296; atque ſic ulteriùs jactûs quotlibet teſſerarum ſupputari poſſe, ſumendo ſemper pro acceſſione unius teſſeræ ſexies jactûs præcedentis.

Porrò notandum, duarum teſſerarum unum duntaxat eſſe jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactûs, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim teſſeras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri poſſe. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B ſex, vel in A ſex & in B quinque puncta patere poſſe. Quatuor punctorum tres ſunt jactûs, videlicet, ipſius A 1 & B 3 puncta, vel ipſius A 3 & B 1 punctum; vel ipſius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum ſimiliter tres ſunt jactûs.
Quinque vel novem punctorum 4or ſunt jactûs.
Sex vel octo punctorum 5que ſunt jactûs.
Septem punctorum 6 ſunt jactûs.

In

In tribus teſſeris reperiuntur	3 vel 18 4 vel 17 5 vel 16 6 vel 15 7 vel 14 8 vel 13 9 vel 12 10 vel 11	punctorum	1 3 6 10 15 21 25 27	jactûs.

Annotat.

Quod hîc Auctor præſtitit in duobus & tribus teſſeris, præſtari quoque poteſt in quatuor quinque pluribúsve, in quibus numeri jactuum quotvis punctorum haud aliter invenientur. At quia facilè fieri poteſt, præſertim ubi teſſeræ multæ fuerint, ut quamplurimi jactûs prætereantur, niſi aliquem in iis inquirendis ordinem obſerves, oſtendam quâ quis methodo uti debeat, ut certus eſſe poſſit, ſe omnes adinveniſſe nullo prætermiſſo. Primò inquirendum, quot modis diverſis componi poſſit propoſitus punctorum numerus, ex tot partibus quot ſunt teſſeræ, quarumque partium nulla ſenarium ſuperet: deinde explorandum, quot jactûs cuilibet horum modorum reſpondeant; quæ quidem omnia meliùs exemplis quàm regulis addiſci poſſunt: Eſto itaque indagandum, quot jactûs reperiantur 12 punctorum in 4 teſſeris.

Hunc in finem incipio à 4 unitatibus, ſcribendo 1.1.1.1; deinde primam unitatem adaugeo continuâ additione unitatum, quouſque ſenarium efficiant & habeatur *6*.1.1.1; ſed quia ſumma horum numerorum nondum exæquat numerum propoſitum 12, attollo etiam ſecundam partem ad binarium, ad ternarium, ſcribendo 2.2.1.1, deinde 3.3.1.1, ſingulisque vicibus primum numerum ad ſenarium elevo, ut habeantur *6*.2.1.1, & *6*.3.1.1, quorum ſummæ adhuc à propoſito numero deficiunt: quare pergo ſcribere 4.4.1.1, primoque quaternario ad ſenarium elevato habebo tandem *6*.4.1.1, quorum ſumma æqualis 12; quare ſeorſim illos adnoto: poſteà ſcribo 5.5.1.1, quos quia pariter 12 efficiunt, iterum reſervo. Jam quia *6*.5.1.1, uti & *6*.*6*.1.1, excedunt 12, illis

illis neglectis, tertiam quoque unitatem, quæ hactenùs intacta manſit, ad binarium evoco, ſcribendo 2.2.2.1, ſed quia primo binario ad ſenarium promoto numeri 6.2.2.1, deficiunt adhuc à 12, tranſeo ad 3.3.2.1, quorum primus pro more adauctus exhibet numeros 6.3.2.1, ſeorſim ponendos, quia complent 12. Deinde ſolummodò ſecundam partem augeo, primam verò minuo unitate, & habebo alios quatuor 5.4.2.1 ſeorſim adnotandos. Jam non pergo attollere ſecundam partem ad 5 vel 6arium, quia ad complendum 12 deprimenda eſſet prima ad 4 vel 3arium, & ſic præcedentes quidam modi redirent; nam ad hoc cavendum ſemper opus eſt, ut nulla partium priorum minor conſtituatur ullâ ſequentium: quocirca ſtatim propero ad 3.3.3.1, ubi mutato primo ternario in quinarium obtineo numeros 5.3.3.1 conſtituentes ſummam propoſitam. Mox verò ſecundâ parte ſublatâ & primâ depreſſâ ad quaternarium, habebo alios quatuor numeros quæſito ſatisfacientes 4.4.3.1. Porrò quia manifeſtum eſt, neutram duarum priorum partium, imò nec ipſam tertiam partem unitate poſſe augeri, quin vel ſumma omnium quatuor excedat 12, vel aliqua præcedentium partium minor fiat aliquâ ſubſequentium, & ſic priſtini quidam modi redeant; idcircò poſtremam etiam unitatem, quam hactenùs intactam reliqui, ad binarium promoveo ſcribendo 2.2.2.2, primoque binario ad 6arium ſublato, 6.2.2.2, qui modus quæſito ſatisfacit. Hinc ſecundam partem augeo, primam minuo, tum unitate, tum binario, & habebo duos alios modos requiſitos 5.3.2.2, & 4.4.2.2. Ubi quia denuò apparet, neutram priorum partium poſſe augeri, quin vel altera minuatur, & ſic priſtini reſultent modi; vel ſumma omnium ſuperet 12; progredior ad 3.3.3.2, ſive aucto unitate primo ternario ad 4.3.3.2, qui novum modum ſuppeditant, quo componi poteſt numerus propoſitus. Tandem quoniam ob eandem rationem nullam trium priorum partium ampliùs augere licet, poſtrema ad ternarium elevanda ſcribendumque 3.3.3.3, quorum ſumma & ipſa æquat 12; quo facto non fas eſt ulteriùs progredi, quandoquidem poſtremus terminus augeri nequit, quin aliquis priorum diminuatur, & ſic redire faciat unum præcedentium modorum. Quapropter conſtat, nullos dari alios modos, quibus componi poſſit numerus 12 ex quatuor aliis, quorum ſinguli

qui ſenarium non ſuperant; præter undecim hactenùs enumeratos, quos eo ordine quo ſeſe offerebant, adjuncto lateribus inſertos, conſpicis. Haud abſimili autem ratione recenſere poterimus omnes modos poſſibiles, quibus evenire poteſt quilibet alius punctorum numerus in tot teſſeris quot quis voluerit, dummodò advertamus, primæ teſſeræ puncta continuâ adjectione unitatis elevanda eſſe ad ſenarium, priusquàm puncta ſecundæ augeantur ſolâ unitate, & puncta pariter ſecundæ attollenda ad ſenarium, priusquàm puncta tertiæ augeantur unitate, & puncta tertiæ, priusquàm puncta $4^{tæ}$, & $4^{tæ}$ priusquàm $5^{tæ}$, & ita deinceps.

Modi	*Jactûs.*
6. 4. 1. 1	12
5. 5. 1. 1	6
6. 3. 2. 1	24
5. 4. 2. 1	24
5. 3. 3. 1	12
4. 4. 3. 1	12
6. 2. 2. 2	4
5. 3. 2. 2	12
4. 4. 2. 2	6
4. 3. 3. 2	12
3. 3. 3. 3	1
Summa Jactuum	125

Hoc peracto, aliud ſupereſt negotium in eo conſiſtens, ut exploretur numerus jactuum ſingulorum modorum; nam ſingulis horum modorum plures iterum reſpondere poſſunt jactûs, prout hic vel ille numerus in hâc illâvé teſſerâ conſpici poteſt. Ita ſi quatuor teſſeræ vocentur A, B, C, & D, patet ad primum modum efficiendum *6.4.1.1*, poſſe vel in A *6*, & in B vel C vel D 4; vel in B *6*, & in A vel C vel D 4, &c. puncta reperiri: unde tot reſultabunt jactûs, quoties iſti 4 numeri diverſo ordine locari poſſunt; quod de reliquis modis pariter intelligendum. Poſſunt verò numeri *6.4.1.1*, quorum duo ſunt diverſi, duo iidem, locum inter ſe permutare duodecies: ſequentes *5.5.1.1*, quorum duo priores, ut & poſteriores duo ſunt iidem, non niſi ſexies: ſequentes verò *6.3.2.1*, qui omnes inter ſe differunt, vicies quater; uti conſtabit ex Doctrinâ de Permutationibus & Combinationibus, quam parte ſecundâ pertractandam ſuſcepi. Hi jactûs unà cum jactibus reliquorum modorum in unam ſummam collecti efficiunt 125, numerum indigitantem omnes quotquot dari poſſunt jactûs 12 punctorum in 4 teſſeris. Quod ipſum indagandum erat.

Verùm enimverò quoniam hæc methodus ſupputandi numerum jactuum in pluribus teſſeris, ſupra modum tædioſa & prolixa eſt,

eſt, oſtendam porrò, quâ arte idem conſequi poſſimus non tantùm pro certo punctorum numero, ſed pro omnibus omninò punctis, beneficio appoſitæ Tabulæ, quæ & expeditè admodùm conſtrui poteſt, & naturam progreſſionemque, quam numeri jactuum inter ſe ſervant, apertiùs ob oculos ponit. Conſtructio talis eſt. Scribantur ordine numeri omnium punctorum quotquot teſſeræ recipere poſſunt à minimo ad maximum, putà, 4.5.6.7 &c. uſque ad 24 pro teſſeris quatuor; aut 5.6.7.8 &c. uſque ad 30 pro teſſeris quinque, &c. & ſub eorum ſex primis collocentur ſex unitates, quibus ſubjungantur ſex aliæ unitates, & his iterum ſex aliæ, idque fiat ſexies, promovendo ſingulis vicibus earum primam uno gradu versùs dextram: quo facto addendæ quæ in eâdem ſerie perpendiculari ſibi invicem reſpondent, ut fiant numeri 1.2.3.4 &c. Horum deinde numerorum ſex quoque conſtituendi ſunt ordines, ita ut ſequentium quilibet præcedenti uno puncto anterior fiat; & tum addendi, ut prodeant numeri 1.3.6.10 &c. Hi iterum ſexies gradatim ponendi & addendi; idque tamdiu continuandum eſt, donec tot ex ultimâ additione reſultantes habeantur numeri, quot reperiuntur diverſa puncta in propoſito teſſerarum numero; ſignificabuntque numeri ſinguli punctorum ſibi reſpondentium jactûs. Ita 4 teſſerarum jactus unus eſt, qui 4 aut 24 puncta producit, quatuor jactûs, qui 5 aut 23, decem qui 6 aut 22, viginti qui 7 aut 21 puncta efficiunt &c. Rationem hujus conſtructionis attendenti percipere haud difficile eſt: Cùm enim ſingulæ accedentes teſſeræ jactûs præcedentium ſextuplicent, manifeſtum eſt, cur numeri jactuum præcedentium teſſerarum ſexies repetendi & addendi ſint; & quia numeri punctorum, qui ſingulis iſtis jactibus reſpondent, augentur unitate, vel binario, vel ternario &c. prout in accedente teſſerâ vel unum, vel duo, vel tria &c. inveniuntur puncta, patet etiam, cur ſeries iſta jactuum ſingulis vicibus uno gradu dextrorſum promovenda ſit, nimirum ut hâc ratione cuilibet jactuum numero reſpondeat numerus punctorum unitate major, quàm eidem reſpondebat in ſerie præcedente.

Nota, non omnes punctorum numeros pro 5 & ſex teſſeris ob ſpatii defectum apponi potuiſſe; ſed facilè ſupplentur, qui deſunt, ex parallelis: nam bini punctorum numeri ab extremis æqualiter

remoti

Ad Pag. 24.

Puncta:

Teſſeræ: I	1.	2.	3.	4.	5.	6.																
II	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.											
III	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.						
IV	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	
V	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	&c.
VI	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	&c.
Num. jactuum pro Teſſeris, I.	1.	1.	1.	1.	1.	1.																
		1.	1.	1.	1.	1.	1.															
			1.	1.	1.	1.	1.	1.														
				1.	1.	1.	1.	1.	1.													
					1.	1.	1.	1.	1.	1.												
						1.	1.	1.	1.	1.	1.											
II.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.											
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.										
			1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.									
				1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.								
					1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.							
						1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.						
III.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.						
		1.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.					
			1.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.				
				1.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.			
					1.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.		
						1.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.	
IV.	1.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	20.	10.	4.	1.	
		1.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	20.	10.	4.	
			1.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	20.	10.	
				1.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	20.	
					1.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	
						1.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	
V.	1.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	420.	305.	205.	126.	&c.
		1.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	420.	305.	205.	
			1.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	420.	305.	
				1.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	420.	
					1.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	
						1.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	
VI.	1.	6.	21.	56.	126.	252.	456.	756.	1161.	1666.	2247.	2856.	3431.	3906.	4221.	4332.	4221.	3906.	3431.	2856.	2247.	&c.

remoti (quos parallelos voco) æquali ſemper jactuum numero gaudent.

Non inopportunum erit hîc loci indigitare, cùm id ſcire nonnunquam interſit, quot jactibus effici poſſint in tribus teſſeris puncta triplicata vel duplicata, (Galli vocant *raſles* & *doublets*) hoc eſt, quoties contingere queat, ut vel in omnibus tribus, vel ſaltem in duabus teſſeris, reperiatur æqualis punctorum numerus: Liquet verò, unum tantùm eſſe jactum, quo produci poſſunt tres ſenarii, item unum quo tres quinarii, unum quo tres quaternarii &c. adeoque non niſi 6 punctorum triplicatorum jactûs exiſtere poſſe. Sed contra 15 ſunt jactûs, quibus duo ex. gr. ſenarii contingere poſſunt: etenim ſi teſſeræ vocentur A, B, & C, fieri poteſt, ut duo illi ſenarii reperiantur vel in teſſeris A & B, vel in A & C, vel in B & C, quod tres casûs efficit: ac deinde ratione cujusque horum caſuum jactus tertiæ teſſeræ, in quâ diverſus punctorum numerus conſpici debet, variari poteſt quinquies; unde quinquies tres ſeu 15 exiſtunt duorum ſenariorum jactûs; quod cùm idem de duobus quinariis, quaternariis & reliquis intelligendum, ſequitur punctorum duplicatorum eſſe ſexies quindecim ſeu 90 jactûs: Proinde cùm trium teſſerarum jactûs in univerſum exiſtant 216, erunt reliqui 120 jactûs ſimplices, quorum numerus etiam initio inveſtigari potuiſſet.

PROPOSITIO X.

INvenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut unâ teſſerâ 6 puncta jaciat.

Si quis primâ vice ſenarium jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depoſitum eſt; quinque verò eſſe casûs, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactûs contra ipſum, & tantùm unus pro ipſo. Quod autem depoſitum eſt vocetur *a*. Eſt itaque ipſi unica expectatio ad obtinendum *a*, ſed quinque ad obtinendum o; id quod per 2dam Propoſitionem tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipſi hunc caſum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere poſſit, qui primâ vice ſuſcipere velit.

Qui duabus* vicibus ſemel ſenarium jacere certet, ſors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciat, obtinet a. Si diverſum eveniat, unus ipſi* reſtat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciat, unus tantùm caſus eſt, & quinque caſus*, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio* unus caſus eſt, qui det ipſi a; & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2dam Propoſitionem valet $\frac{11}{36}a$. Unde contracertanti luſori cedit reliquum $\frac{25}{36}a$; adeò ut ſors utriusque ſive æſtimatio expectationis eam ſervet rationem, quam 11 ad 25; id eſt, minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo ſubducitur, quòd ſors ejus, qui tribus vicibus ſemel ſenarium jacere ſuſcipit, ſit futura $\frac{91}{216}a$; ita ut 91 contra 125 deponere poſſit; id eſt, paulò minus quàm 3 ad 4.

H Qui quatuor vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{671}{1296}a$; ita ut 671 contra 625 deponere poſſit; id eſt, plus quàm 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{4651}{7776}a$, & poteſt 4651 contra 3125 deponere; id eſt, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui ſex vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{31031}{46656}a$, & poteſt 31031 contra 15625 deponere; id eſt, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita conſequenter quilibet jactuum numerus inveniri poteſt. Sed licet majori compendio progredi, ut in ſequenti Propoſitione oſtendetur; ſine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

Annotat.

H *Qui quatuor vicibus idem ſuſcipit, &c.*] Subiit aliquando cogitatio, poſſe fortè quempiam calculum Auctoris tali diſcurſu ſuſpectum reddere: Si quis quatuor jactibus ſenarium jacere contendens, æquam circiter ad vincendum ac perdendum expectationem habeat, hoc eſt, æquè facilè vincat ac perdat, fiet ut aliquandiu ludens toties vincat quoties perdit, ſi & pari fortunâ utatur; adeoque ut è quaternis jactibus toties unus ſenarius exiſtat, quoties è quaternis aliis nullus: quare in octonis jactibus unus reperietur ſenarius, ac proinde in ſexcentis verb. gr. jactibus ſenarii 75. Sunto jam ſex alii, qui eâ conditione ludant, ut primus vincat, ſi unum punctum jaciatur, ſecundus ſi duo, tertius ſi tria &c. quo utique

pacto

pacto æquâ ſorte certabunt; ſed ludant etiam pari fortunâ, ſic fiet neceſſariò, ut in ſexcentis jactibus centum eveniant ſenarii: idcircò cùm æquâ ſorte & pari fortunâ luditur, in ſexcentis jactibus ſenarii prodibunt centum & pauciores quàm centum; quod abſurdum. Huic fallaciæ ut ſatisfiat, pono quidem, quòd ubi æquâ fortunâ luditur, ibi in jactibus 600 evenire debent ſenarii centum; ſed nego, quòd ſi quis quaternis jactibus ſemel ſenarium jacere certaverit, propterea quatuor jactibus ad vincendum opus habeat; poteſt enim vel primus, vel ſecundus, vel tertius jactus ſenarius exiſtere, quo caſu reliqui jactûs ſequenti quaternario annumerantur; ſic ut pauciores quàm octo ad ſemel vincendum ac perdendum ſufficere poſſint. Id verò quo pacto huc quadret, ſic oſtendo: Fingo, in omnibus jactuum quaternariis, qui me ludi victorem reddunt, primum quemque jactum ſenarium exiſtere; ſic centies vincendo non niſi centum jactûs inſumuntur, reliqui 500 per 4 diviſi indigitant me 125ies perditurum. Si verò illorum quaternorum jactuum poſtremus quiſque ſenarius foret, vincendo centies 400 jactûs abſumerentur, reſiduis tantùm ducentis, qui oſtenderent me quinquagies perditurum. Quocircà cùm nonnullis caſibus ſæpiùs perderem quàm vincerem, aliis pluries vincerem quàm perderem, colligo fieri benè poſſe, ut hâc conditione æquâ ſorte certetur. Contra verò, ſi quis tribus vicibus ſemel ſenarium jacere ſuſcipiat, is quidem aliquot caſibus toties vinceret quoties perderet, nempe ſi tertius quivis jactus ſenarius exiſteret; aliis multò pluries perderet quàm vinceret, ſi nim. primus quiſque ſenarius foret; ſed nullo caſu ſæpiùs vinceret quàm perderet: unde conſtare liquidò poteſt, neminem niſi cum detrimento tali conditione certare poſſe. Quæ quidem eum in finem hîc adduco, ut palàm fiat, quàm parùm fidendum ſit ejusmodi ratiociniis, quæ corticem tantùm attingunt, nec in ipſam rei naturam altiùs penetrant; tametſi in toto vitæ uſu etiam apud ſapientiſſimos quosque nihil ſit frequentius.

PROPOSITIO XI.

INvenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut duabus teſſeris 12 puncta jaciat.

Si quis primâ vice duos ſenarios jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, id eſt, ad obtinendum a; & 35 eſſe casûs, quibus perdat ſive nihil habeat, quoniam 36 ſunt jactûs. Itaque habet per 2dam Propoſitionem $\frac{1}{36}a$.

Qui duabus vicibus idem ſuſcipit, ſi primâ vice duos ſenarios jaciat, obtinebit a; ſi verò primâ vice diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, id quod ipſi, per illud quod jam dictum eſt, valet $\frac{1}{36}a$.

Atqui ut primâ vice duos ſenarios jaciat, unus tantùm eſt caſus, ſed 35 casûs, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi a, & 35 qui dent $\frac{1}{36}a$; id quod per 2dam Propoſitionem valet $\frac{71}{1296}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1225}{1296}a$.

Ex his invenire licet, qualis ſit ei ſors aut pars, qui idem ſuſcipit quaternis jactibus, prætereundo caſum eum, cùm quis illud ternis jactibus ſuſcipit.

Etenim, qui 4or vicibus duos ſenarios jacere contendit, ſi illud 1mâ aut 2dâ vice faciat, obtinet a; ſin minùs, reſtant ipſi duo jactûs, qui per illud quod ſuperiùs dictum eſt, valent $\frac{71}{1296}a$. Sed
I propter eandem rationem habet etiam 71 casûs, ut ex duobus primis jactibus ſemel duos ſenarios jaciat, contra 1225 casûs, quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio 71 casûs, qui ipſi dent a, & 1225 casûs, qui dent ipſi $\frac{71}{1296}a$. Quod ipſi per 2dam Propoſitionem valet $\frac{178991}{1679616}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616}a$. Id quod oſtendit eorum ſortes eſſe ad ſe invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus ſemel duos ſenarios jacere certat. Ac inde rurſus expectatio ejus, qui idem ſuſcipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui iſtud 8 vicibus ſuſcipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in ſe recipit. In quâ operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis ſors incipiat, inter eum qui id ſuſcipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immenſum excreſcerent, poſte-
K riores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus ſuſcipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiorem conditionem inire, cùm 25 jactibus aggreditur.

Anno-

Annotat.

Sed propter eandem rationem habet etiam 71 *caſûs &c.*] Juvat hîc obſervare, quod Auctor ſupponit, expectationem quamcunque fractione expreſſam conſiderari etiam poſſe tanquam reſultantem ex tot caſibus ad obtinendum depoſitum a, quot indigitat numerator fractionis, & tot caſibus ad nihilum, quot ſignificat differentia inter illum & denominatorem; tametſi fortâſſis aliter ad expectationem illam perventum fuerit: Sic quanquam ille, qui duabus vicibus duos ſenarios jacere ſuſcipit, ad expectationem ſuam $\frac{71}{1296}a$ perveniat per 1 caſum ad a, & 35 casûs ad $\frac{1}{36}a$; nihilominùs cenſeri etiam poterit eam ſibi acquirere per 71 casûs ad a, & 1225 casûs ad o. Quoniam habens 71 casûs ad a, & 1225 ad o; habet hanc expectationem $\frac{71}{1296}a$; & qui plures casûs ad a haberet ac pauciores ad nihilum, aut vice versâ, ejus quoque expectatio contra hypoth. major minorvé foret, quàm $\frac{71}{1296}a$, per Coroll. 1. Propoſit. III. I

Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 *vicibus ſuſcipit &c.*] In præced. Propoſ. adſtruxit Auctor, poſſe quatuor jactibus cum lucro ſuſcipi, ut unâ teſſerâ ſenarius jaciatur; nunc aſſerit, nondum illud 24 jactibus poſſe, ut duabus teſſeris duo jaciantur ſenarii; quæ multis planè videbuntur ἀσύστατα, cùm 24 jactûs ad omnes 36 jactûs duarum teſſerarum eandem præcisè rationem ſervent, quam 4 jactûs ad omnes ſex jactûs unius teſſeræ. Eâdem olim difficultate conſtrictus hæſit, referente Paſcalio in literis ad Fermatium, quæ hujus operibus Toloſæ A°. 1679. impreſſis pagin. 181. inſertæ leguntur, Anonymus quidam cæterà ſubacti judicii Vir, ſed Geometriæ expers. Hâc enim qui imbuti ſunt, ejusmodi ἐναντιοφανείας minimè morantur, probè conſcii dari innumera, quæ admoto calculo aliter ſe habere comperiuntur, quàm initio apparebant; ideoque ſedulò cavent, juxtà id quod ſemel iterumque monui, ne quicquam analogiis temerè tribuant. K

Ad Propoſitionem in genere:

SI pro numeris literas ſubſtituiſſet Auctor, potuiſſet hanc & præcedentem Propoſitionem uno Problemate complecti, ejusque ſolutionem generalem pari facilitate inveſtigare, hoc pacto: Ponatur $a \propto b+c$ pro numero omnium caſuum, qui reperiuntur in unâ pluribusvé teſſeris, aut in quâvis aleâ, (cùm hæc non magis teſſeris applicari debeant, quàm quibusvis ſortitionibus aliquoties reiterandis, & in quibus numerus caſuum perpetuò conſtans idemque manet) b verò ſumatur pro numero caſuum, quibus præſcriptus punctorum numerus obtinetur, ſeu quibus obtinetur quod ſuſceptum eſt; & c pro numero caſuum, quibus illud non obtinetur, ſeu quibus non præſtatur quod intenditur.

Jam ſi quis primâ vice ſuſcipiat præſtare aliquid, patet, eum habere b ſeu $a-c$ caſûs ad illud præſtandum, hoc eſt, ad obtinendum depoſitum, quod nunc ſit 1, & c caſûs ad obtinendum 0; quare ejus ſors per Cor. 1. Prop. III. fit $\frac{a-c}{a}$: Si quis duabus vicibus illud ſuſcipiat, rurſus habet $a-c$ caſûs ad 1 vel $\frac{a}{a}$, ſed c caſûs quibus pertingit ad præcedentem expectationem $\frac{a-c}{a}$; id quod per III. Prop. valet $\frac{aa-cc}{aa}$: Si quis tribus vicibus idem præſtare contendat, habet denuò $a-c$ caſûs ad 1 ſeu $\frac{aa}{aa}$, & c caſûs ad ſortem proximè inventam $\frac{aa-cc}{aa}$; quod ipſi tantundem valet, ac $\frac{a^3-c^3}{a^3}$: Eodem modo, ſi 4 vicibus illud in ſe recipiat, invenitur ejus expectatio $\frac{a^4-c^4}{a^4}$: ſi quinque, $\frac{a^5-c^5}{a^5}$; & in genere ſi n vicibus, reperitur ſors ejus $\frac{a^n-c^n}{a^n}$, ſic ut remaneat contracertanti $\frac{c^n}{a^n}$.

Præter hanc methodum, quæ Auctoris eſt, duo alii ſuppetunt modi haud inelegantes Problema ſolvendi, quorum unus hic eſt: Quærantur ordine expectationes aleatoris pro ſingulis jactibus ſeorſim,

ſim, hoc eſt, quæratur quæ ſint illius ſortes, ſi primo, ſecundo, tertio, quarto &c. demùm jactu, non alio, præſtare quid velit; quod enim ex omnium expectationum additione reſultat, erit expectatio quæſita. Qui primo jactu quid ſuſcipit, ejus ſors oſtenſa eſt eſſe $\frac{a-c}{a}$ ∞ $\frac{b}{a}$. Qui ſecundo jactu præſtare vult, ille ſi primo præſtat, non præſtat quod intendit, cùm ſolo ſecundo præſtare debuiſſet; ideoque depoſito fruſtratur: ſin autem primo non præſtat, reſtat illi unus jactus quo id præſtare tenetur, qui ipſi valet, ut dictum $\frac{b}{a}$; ſed numerus caſuum, quibus primo jactu id efficit, per hyp. eſt b, & eorum quibus non efficit c; unde per 1. Coroll. III. ſors ejus ſit $\frac{bc}{aa}$. Qui tertio demùm jactu præſtare intendit, is ſi primo præſtat rurſus depoſito excidit, quia intentum non aſſecutus eſt, quod eò tendebat, ut ſolo tertio præſtaret: ſin primo jactu non præſtet, ſuperſunt ipſi duo jactûs, quorum ſolo poſteriori præſtare tenetur, quo caſu oſtenſum eſt ipſi deberi $\frac{bc}{aa}$; ſed prius illud b, hoc c caſibus contingere poteſt, quod proin ſortem ejus per idem Coroll. efficit $\frac{bcc}{a^3}$. Qui ſolo 4to jactu præſtare aggreditur, is ſi primo præſtat, depoſito identidem privatur: ſi ſecùs, per tres reſiduos jactûs ad præced. expectationem $\frac{bcc}{a^3}$ pertingit; quod illi nunc ſortem parit $\frac{bc^3}{a^4}$. Atque eodem modo colligitur, quòd ſors ejus, qui 5to jactu in ſe recepit, ſit $\frac{bc^4}{a^5}$; qui ſexto, $\frac{bc^5}{a^6}$; & generaliter qui n jactu, $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$. Ergò cùm ſors ejus, qui primo jactu aggreſſus eſt, ſit $\frac{b}{a}$; qui ſecundo, $\frac{bc}{aa}$; qui tertio, $\frac{bcc}{a^3}$; qui ultimo, $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$; atque expectatio ejus, qui illud indefinitè in aliquo primorum n jactuum præſtandum ſuſcepit, ex omnibus illis ſimul ſumtis conſletur, ſequitur hanc fore ejus expectationem

$\frac{b}{a}$ +

$\frac{b}{a} + \frac{bc}{aa} + \frac{bcc}{a^3} + \frac{bc^3}{a^4} \ldots$ uſque ad $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$, quæ ſeries eſt quantitatum geometricè-proportionalium, quarum ſumma invenitur $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, ut ſuprà.

Alter modus: Qui n jactibus unius teſſeræ præſcriptum punctorum numerum jacere ſuſcipit, perinde facit, ut ad ſeq. Prop. oſtendetur, ac ſi eundem unico jactu n teſſerarum in aliquâ minimùm teſſerâ jaciendum ſuſciperet. Concipiantur itaque n teſſeræ, ſingulæ inſtructæ a hedris, quas inter ſint c iſto punctorum numero non ſignatæ. Sic erit numerus omnium caſuum in univerſis n teſſeris, a^n; (ut ſupra poſt Prop. IX. evicit Auctor) & per eandem rationem numerus eorum, quibus optata puncta in nullâ teſſerarum emicant, c^n; quia nimirum ratione cujuslibet ex c hedris unius teſſeræ, quælibet ſimilium hedrarum alterius teſſeræ ſimul cadere poteſt. Neceſſe igitur eſt, ut reliquis $a^n - c^n$ caſibus hæc puncta ſaltem in aliquâ teſſerarum reperiantur. Quare qui tali conditione certat, habet $a^n - c^n$ caſûs ad obtinendum depoſitum 1, & c^n caſûs ad obtinendum 0; quod rurſus ut anteà ſortem illi parit $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, ſic ut contracertanti ſemper relinquatur $\frac{c^n}{a^n}$.

Exhibitâ ſic generali Problematis ſolutione, ſi nunc porrò cum Auctore ſcire cupiamus, quo jactuum numero æqualis ſors inter contracertantes incipiat, æquandæ tantùm inter ſe erunt eorum inventæ ſortes, ut fiat $a^n - c^n \infty c^n$, hoc eſt, $a^n \infty 2c^n$; quo indicatur nil aliud requiri, quàm ut numerus omnium caſuum, & numerus eorum quibus non obtinetur quod ſuſceptum eſt, continuo in ſe ductu ad ſimiles poteſtates attollantur, quouſque productum prioris numeri fiat poſterioris duplum: tum enim index poteſtatis, ad quam uterque elevatus eſt, indigitabit quæſitum. Quæ operatio illud inſuper commodi præ Hugenianâ habet, quòd non ſupponat ullius præcedentis casûs ſortem cognitam eſſe: cætera enim compendia, quorum meminit Auctor, de abſcindendis à fine notis, & eliciendis per ſaltum expectationibus, & hîc loci obtinet; quan-

quandoquidem dato cujuslibet numeri quadrato, ejus biquadratum inveniri poteſt non reperto cubo, & biquadrato-quadratum non repertis intermediis poteſtatibus, &c. Viſum autem eſt, exempli Auctoris, in quo a valet 36 & c 35, totam operationem hîc ſubjungere:

	juſto	*minor*	*major*
a ∞	36		
aa ∞	1296		
a^4 ∞		1679 . .	1680 . .
a^8 ∞		2819 . .	2823 . .
a^{16} ∞		7946 . .	7970 . .
a^{24} ∞		2239 . .	2250 . .
a^{25} ∞		8060 . .	8100 . .

	min.	*maj.*
c ∞	35	
cc ∞	1225	
c^4 ∞	1500 . .	1501 . .
c^8 ∞	2250 . .	2254 . .
c^{16} ∞	5062 . .	5081 . .
c^{24} ∞	1138 . .	1146 . .
c^{25} ∞	3983 . .	4011 . .
$2c^{24}$ ∞	2276 . .	2292 . .
$2c^{25}$ ∞	7966 . .	8022 . .

ubi liquet, 24^tam^ poteſtatem numeri 36 (quæ cadit inter 2239 . . & 2250 . .) deficere à 24^tæ^ poteſtatis numeri 35 duplo (quod cadit inter 2276 . . & 2292 . .): ſed 25^tam^ poteſtatem illius numeri (cujus limites ſunt 8060 . . & 8100 . .) excedere viciſſim duplum 25^tæ^ hujus, (utpote quod terminis continetur 7966 . . & 8022 . .).

Monendum tamen eſt, totum hoc expediri poſſe negotium compendio citra comparationem majori per logarithmos, ita: Quia habemus $a^n \infty 2c^n$, & æqualium numerorum æquales ſunt logarithmi, erit quoque $nla \infty l2 + nlc$, ſive $nla - nlc \infty l2$, ſeu denique $n \infty \frac{l2}{la - lc}$; quo indicatur quæſitum numerum jactuum haberi, dividendo ſimpliciter log-um binarii per differentiam inter log-os numerorum a & c. En operationem:

$a \infty 36 \mid la \infty 1.5563025$
$c \infty 35 \mid lc \infty 1.5440680$

$la - lc \infty 0.0122345$) $l2 \infty 0.3010300$ (plus quàm 24, & minus quàm 25; quæ calculo Auctoris & noſtro plane ſunt conſona.

Cæterùm ſolutio noſtra Propoſitionis præſentis anſam nobis ſuppeditavit inveſtigandi præterea nonnulla alia huic affinia Problemata, quorum unum hoc eſt: Si plures colluſores jacere ſuſcipiant præſcriptum punctorum numerum, iisque ſingulis uni poſt alterum nonnulli jactus, huic plures illi pauciores, continuò inſtituendi concedantur, quæritur cujusque ſors? Ante omnia liquet, quòd ille cujus ſors quæritur haberet per ante oſtenſa $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, ſi ipſe ludum inciperet; ſed quia alii præcedunt, qui victoriam illi præripere poſſunt, ſors ejus minoris æſtimanda venit. Deinde patet, quòd expectationes omnium ipſum præcedentium ſimul ſumtæ æquari debeant expectationi unius ſolius, qui in locum eorum ſuccedere vellet, & cui tot jactus concederentur quot omnibus illis ſimul. Sed per eandem rationem, ſi numerus horum jactuum dicatur s, expectatio hæc foret $\frac{a^s - c^s}{a^s}$; unde per annotata hujus ad lit. I. ille cujus ſors quæritur, tum, cùm primus ludere incipit, habere cenſetur $a^s - c^s$ caſus, quibus aliquis præcedentium vincat ſibique depoſitum præripiat; & c^s caſus, quibus ludendi vices ad ſe devolvuntur, ipſeque ſortem antè dictam $\frac{a^n - c^n}{a^n}$ acquirit: id quod ipſi per 1. Coroll. III. valet $\frac{a^n - c^n . c^s}{a^n . a^s} \infty \frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}$. Idem etiam ſic evincitur: Quia univerſis colluſoribus incluſo ultimo per hyp. conceſſi ſunt $s + n$ jactus, erit eorum expectatio totalis $\frac{a^{s+n} - c^{s+n}}{a^{s+n}}$; à quâ proin ſi expectationes omnium præcedentium poſtremum, quæ ſimul ſumtæ conſtituunt $\frac{a^s - c^s}{a^s}$, ſubtrahas, relinquetur pro expectatione ſolius ultimi $\frac{a^{s+n} - c^{s+n}}{a^{s+n}} \frac{- a^s + c^s}{a^s} \infty \frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}$, ut antea. Nota, inſigniter hîc abbreviari calculum, ſi numeri caſuum a & c compoſiti ſint, & eorum loco per 2. Cor. III. minimi

in

in eâdem ratione termini accipiantur: Proponantur ex. gr. aliquot colluſoribus jacienda duabus teſſeris puncta ſeptem, & eorum primo permittatur unus, ſecundo 2, tertio 3, quarto 4 jactus conſecutivè inſtituendi, velimque ſcire expectationem quarti. Quoniam hîc numerus jactuum quarti $n \infty 4$, & ſumma eorum, qui præcedentibus tribus ſunt conceſſi, $s \infty 1 + 2 + 3 \infty 6$; & proin

$\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}} \infty \frac{a^4 c^6 - c^{10}}{a^{10}}$; inſuperque numeri a & c caſuum ſcil. tum omnium in duabus teſſeris, tum eorum quibus non obtinetur præſcriptus punctorum ſeptenarius, ſunt 36 & 30, pro quibus pono tantùm 6 & 5; idcirco à producto ex $4^{\text{tâ}}$ poteſtate ſenarii in 6^{tam} quinarii aufero decimam quinarii, reliquumque divido per decimam ſenarii, & prodibit pro quæſitâ expectatione colluſoris quarti $\frac{10484375}{60466176}$.

Manifeſtum eſt in hocce Problemate, omnium colluſorum, quotquot etiam fuerint & quotcunque jactus ipſis concedantur, expectationes in unam ſummam collectas neceſſariò ab uno integro deficere debere; quandoquidem ſemper caſu quodam utcunque rariſſimo accidere poteſt, ut eorum nullus præſcriptum punctorum numerum conſequatur. Deinde etiam per ſe clarum eſt, quòd in pari jactuum numero unusquisque poſteriorum colluſorum deteriorem ſortem nanciſci debeat unoquoque priorum, eoque magis quò plures unicuique jactus continuò inſtituendi conceduntur; cùm utique tot concedi poſſint, ut primi ludentis ſpes in certitudinem ferè abeat, reliquis verò omnis vincendi ſpes evaneſcat. Quæ proin conſideratio aliud nobis ſuggeſſit Problema, quod eò tendit, ut dato numero jactuum à primo conſecutivè inſtituendorum inveſtigetur, quot jactus ſecundo reliquisque concedendi ſint, ut ſortes omnium fiant æquales: oportet autem, ut numerus jactuum primi non pariat ei ſortem excedentem unum dimidium, ſi colluſores ſunt duo; aut tertiam partem integri, ſi ſunt tres; aut 4^{tam} ſi quatuor &c. cùm ſecùs Problema impoſſibile foret. Sint colluſores m, numerus jactuum ab univerſis inſtituendorum vocetur x, ab omnibus excepto ultimo y, adeoque à ſolo ultimo $x - y$; numerus verò jactuum

 primi

primi ſit n: erit ejus expectatio $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, & omnium m colluſorum expectationes conjunctim $\frac{a^x - c^x}{a^x}$; cumque ſingulæ expectationi primi ponantur æquales, erit quoque earum ſumma $\frac{m . \overline{a^n - c^n}}{a^n}$; quare $\frac{m . \overline{a^n - c^n}}{a^n} \propto \frac{a^x - c^x}{a^x}$, hoc eſt $m - \frac{mc^n}{a^n} \propto 1 - \frac{c^x}{a^x}$, ſeu factâ tranſpoſitione, $\frac{c^x}{a^x} \propto \frac{mc^n}{a^n} + 1 - m \propto \frac{mc^n + \overline{1 - m}\, a^n}{a^n}$, & ſumtis logarithmis, $xlc - xla \propto l\overline{mc^n + \overline{1 - m}\, a^n} - nla$, factâque diviſione, $x \propto \frac{l\overline{mc^n + \overline{1 - m}\, a^n} - nla}{lc - la}$, ſive (mutatis ſignis ob $a > c$) $x \propto \frac{nla - l\overline{mc^n + \overline{1 - m}\, a^n}}{la - lc}$. Ob eandem rationem omnium colluſorum præcedentium ultimum, hoc eſt, primorum $m - 1$ colluſorum expectationes ſimul ſumtæ ſunt $\frac{\overline{m - 1} . \overline{a^n - c^n}}{a^n} \propto \frac{a^y - c^y}{a^y}$; unde ſimili modo elicitur $y \propto \frac{nla - l\overline{\overline{m - 1}\, c^n + \overline{2 - m}\, a^n}}{la - lc}$: quare tandem habetur $x - y \propto \frac{l\overline{\overline{m - 1}\, c^n + \overline{2 - m}\, a^n} - l\overline{mc^n + \overline{1 - m}\, a^n}}{la - lc}$, quod requirebatur. Ita ſi ſint tres colluſores, & eorum primo duo concedantur jactus, jacienda verò proponantur duabus teſſeris puncta ſeptem (vel etiam unâ teſſerâ puncta ſex; quia utrobique ratio numeri a ad numerum c ea eſt, quam habet 6 ad 5) quo caſu primi ſors per ſuprà oſtenſa, propter $n \propto 2$, eſt $\frac{aa - cc}{aa} \propto \frac{11}{36}$ paulò minor triente depoſiti: facio primò $m \propto 2$, deinde $m \propto 3$, & hoc pacto reperio, quòd ad æquandas quàm proximè reliquorum ſortes concedendi ſint ſecundo colluſori tres, & tertio octo jactus.

PRO-

PROPOSITIO XII.

INvenire, quot teſſeris ſuſcipere quis poſſit, ut primâ vice duos ſenarios jaciat.

Hoc autem tantundem eſt, ac ſi quis ſcire velit, quoto jactu L
quiſpiam unâ teſſerâ ſuſcipere poſſit, ut bis ſenarium jaciat. Quòd ſi quis duobus jactibus ſuſciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante M
oſtenſa ſunt, $\frac{1}{35}a$. Qui illud tribus jactibus in ſe reciperet, ſi primus ejus jactus ſenarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque ſenarius eſſe deberet, id quod tantundem valere dictum eſt ac $\frac{1}{36}a$. At verò primo ejus jactu exiſtente ſenario, opus eſt, ut ex duobus jactibus non niſi ſemel ſenarium jaciat. Quod per X. Propoſitionem tantundem valet ac ſi $\frac{11}{36}a$ haberet. Atqui certum eſt ipſum unum habere caſum, quo primâ vice ſenarium jaciat, & quinque caſus quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio unum caſum ad $\frac{11}{36}a$, & 5 caſus ad $\frac{1}{36}a$, id quod per II. Propoſitionem tantundem valet ac $\frac{15}{216}a$ ſeu $\frac{2}{27}a$. Hoc pacto aſſumendo continuè unum jactum ampliùs, invenitur 10 jactibus unâ teſſerâ, aut 10 teſſeris primo jactu ſuſcipi poſſe, ut duo ſenarii jaciantur, idque cum lucro.

Annotat.

Hoc autem tantundem eſt &c.] Si cui decem ex. gr. L
teſſeris unus jactus concedatur, evidens utique eſt nihil referre, ſive decem illas teſſeras ſimul & ſemel ſeu ſucceſſivè unam poſt alteram in alveum projiciat: & ſi ſucceſſivè id facit, perinde rurſus eſſe conſtat, ſive teſſeræ illæ decem quæ projiciuntur ſint totidem diverſæ teſſeræ, ſive una eademque decies ex alveo ſublata & projecta.

Per ea quæ ante oſtenſa ſunt &c.] Oſtenſum eſt in M
præced. Propoſ. $\frac{1}{35}a$ eſſe partem ejus, qui uno jactu duabus teſſeris duos ſenarios jacere contendit, ſed modò audivimus perinde eſſe, ſive quis unum jactum duabus teſſeris, ſive duos jactus unâ teſſerâ inſtituat: quare & illi, qui unâ teſſerâ duobus jactibus duos ſenarios, hoc eſt, bis ſenarium jacere ſuſcipit, eadem debetur portio $\frac{1}{36}a$.

Ad Propoſitionem in genere:

PRoblema hîc loci propoſitum, non ſecùs atque præcedens, ſolutionem quoque admittit per ſymbola; & generaliter conceptum huc redit, ut inveniatur expectatio ejus, qui certo jactuum numero ſuſcepit aliquid præſtare bis, vel ter, vel quater pluriesve. Nam qui ſemel tantùm id præſtare ſuſcipit, ejus ſors in præced. jàm Propoſitione calculo ſubducta habetur.

Qui duabus vicibus aliquid bis præſtare ſuſcipit, ille ſi primâ vice non præſtat nihil depoſiti habebit, ſed totum adverſario cedet: ſin id primâ vice præſtiterit, reliquo aleæ jactu adhuc ſemel præſtare tenetur; quo caſu per annotata præced. Propoſ. (poſitâ ſignificatione literarum a, b & c, ut ibi) ipſi debetur $\frac{a-c}{a}$, & adverſario ejus $\frac{c}{a}$; (præſtat enim hujus ſortem, ceu brevioribus terminis comprehenſam, inquirere.) Atqui ſunt b caſus, quibus id primâ vice efficere poſſit; & c caſus, quibus ſecùs eveniat: quocirca ſunt contracertanti c caſus ad obtinendum depoſitum $1 \infty \frac{c+b}{a}$, & b caſus ad acquirendum $\frac{c}{a}$; id quod ipſi valet $\frac{cc+2bc}{aa}$.

Qui tribus vicibus aliquid bis efficere contendit, ille ſi primâ vice efficiat, quod ſemper b caſibus evenit, duabus reliquis vicibus idem non niſi ſemel efficere obſtrictus eſt, ſortemque adeò Antagoniſtæ ſui per Annotat. præc. Próp. facit $\frac{cc}{aa}$: ſin primâ vice id non efficiat, quod caſibus c contingit, tenebitur illud duabus reliquis vicibus bis præſtare; quod valere modò diximus Adverſario ejus $\frac{cc+2bc}{aa}$. Habet igitur iſte c caſus ad $\frac{cc+2bc}{aa}$, & b caſus ad $\frac{cc}{aa}$; id quod ei parit expectationem $\frac{c^3+3bcc}{a^3}$.

Sic qui quatuor vicibus aliquid bis effectui dare tentat, is b caſibus, quibus primus ei jactus ex voto ſuccedere poteſt, adverſario ſortem acquirit $\frac{c^3}{a^3}$; & c caſibus, quibus contrarium accidit,

eum

eum ad præcedentem expectationem $\frac{c^3+3bcc}{a^3}$ perducit; id quod huic ſortem gignit $\frac{c^4+4bc^3}{a^4}$.

Qui verò tribus vicibus ter præſtare quippiam conatur, is ſi primo jactu ſcopo aberret, antagoniſtam ſuum depoſiti 1 in $\frac{cc+2bc+bb}{aa}$ victorem reddit: ſin conſequatur quod intendit, reſiduos habet duos jactus, quorum etiam uterque ejus voto reſpondere deberet; quo in ſtatu adverſarii ſortem oſtendimus eſſe $\frac{cc+2bc}{aa}$. Poſterius autem b, prius c caſibus accidere diximus; unde contracertantis expectatio reſultat $\frac{c^3+3bcc+3bbc}{a^3}$.

E quibus porrò haud abſimili ratione inveniri poſſunt expectationes ejus, qui alteri 4, 5, 6 &c. aleæ jactibus aliquid bis, ter, quater, pluriesve præſtandum offert: unde nata eſt ſequens Tabella, quam quis levi labore continuabit, quouſque opus fuerit; ſi conſideret, columnas transverſales tabellæ ordine complecti quantitates omnium poteſtatum binomii $\frac{c+b}{a}$, ſecundam nim. quadrati, tertiam cubi, quartam biquadrati &c. ita quidem, ut prima columna verticalium ſolos primos, ſecunda duos, tertia tres, quarta 4^or^ priores harum poteſtatum terminos exhibeat. Hinc enim colligitur facilè, illum qui indefinitè n jactibus aliquid bis præſtandum offert, ſortem habere $\frac{c^n+nbc^{n-1}}{a^n}$; qui ter, $c^n+nbc^{n-1}+\frac{n.n-1}{2}bbc^{n-2}:a^n$; qui quater, $c^n+nbc^{n-1}+\frac{n.n-1}{2}bbc^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2}{2.3}b^3c^{n-3}:a^n$; & generaliter denique, qui illud m vicibus præſtandum offert, huic ſortem competere $c^n+nbc^{n-1}+\frac{n.n-1}{2}bbc^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2}{2.3}b^3c^{n-3}$ .... uſque ad $+\frac{n.n-1.n-2....n-m+2}{2.3.4....m-1}b^{m-1}c^{n-m+1}:a^n$.

Eadem etiam formula aliter & ſcitè elici poteſt, in auxilium vocatâ combinationum doctrinâ, hoc modo: Conſtat ex ſuprà

Tabu-

Tabula

pro cognoſcendâ ſorte ejus, qui alteri aliquot aleæ jactibus quippiam ſemel vel aliquoties præſtandum offert.

Nota, ſors ejus qui ſuſcipit, perpetuò eſt complementum ad unitatem ſortis illius, qui offert. Num. omnium caſuum in ſingulis jactibus $\propto a$; *eorum quibus præſtatur quod ſuſceptum eſt* $\propto b$; *quibus non præſtatur* $\propto c$.

Si quid præſtandum ſit, *Jactibus*	*ſemel*	*bis*	*ter*	*quater*	
I.	$c : a$				
II.	$cc : aa$	$cc + 2bc : aa$			
III.	$c^3 : a^3$	$c^3 + 3bcc : a^3$	$c^3 + 3bcc + 3bbc : a^3$		
IV.	$c^4 : a^4$	$c^4 + 4bc^3 : a^4$	$c^4 + 4bc^3 + 6bbcc : a^4$	$c^4 + 4bc^3 + 6bbcc + 4b^3c : a^4$	
V.	$c^5 : a^5$	$c^5 + 5bc^4 : a^5$	$c^5 + 5bc^4 + 10bbc^3 : a^5$	$c^5 + 5bc^4 + 10bbc^3 + 10b^3cc : a^5$	&c.
VI.	$c^6 : a^6$	$c^6 + 6bc^5 : a^6$	$c^6 + 6bc^5 + 15bbc^4 : a^6$	$c^6 + 6bc^5 + 15bbc^4 + 20b^3c^3 : a^6$	

m vicibus

n. $c^n + nbc^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} bbc^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} b^3c^{n-3} \ldots\ldots + \frac{n.n-1.n-2\ldots n-m+2}{1.2.3.4\ldots m-1} b^{m-1}c^{n-m+1} : a^n.$

dictis,

dictis, eodem recidere, ſive quis n jactibus unius teſſeræ aliquid m vicibus præſtandum ſuſcipiat, ſive id unico jactu n teſſerarum in m teſſeris præſtandum ſibi ſumat: Sint igitur teſſeræ A, B, C, D &c. quarum numerus ſit n, ſingulæ inſtructæ a hedris, quas inter b voto ſuſcipientis reſpondeant, reliquæ c non reſpondeant; & quæratur, quot caſibus accidere poſſit, ut tum in nullâ teſſerarum, tum in unâ tantùm teſſerâ, tum in ſolis duabus, 3, 4 &c. tum denique in $m-1$ tantùm teſſeris præſtetur quod ſuſceptum eſt: omnibus enim his caſibus ſuſcipiens voto ſuo excidit, & antagoniſta ejus victoriâ potitur. Oſtenſum autem fuit in annot. præc. Prop. caſus eſſe c^n, quibus contingere poſſit ut in nullâ n teſſerarum prodeat quod ſuſceptum eſt: & ſimili modo colligitur, caſus eſſe c^n, quibus contingere poſſit ut in nullâ n teſſerarum prodeat quod ſuſceptum eſt; & ſimili modo colligitur caſus eſſe b vel bb vel b^3 &c. quibus una teſſerarum putà A, aut duæ A & B, aut tres A, B & C &c. ſuſcipientis voto reſpondeant; ſicut & caſus c^{n-1}, aut c^{n-2}, aut c^{n-3} &c. quibus cæteræ $n-1$, vel $n-2$, vel $n-3$ &c. teſſeræ ſpem ejus fallant: unde cùm ſinguli horum caſuum cum unoquoque priorum conjungi poſſint, ex ductu horum in illos naſcentur caſus bc^{n-1}, aut bbc^{n-2}, aut b^3c^{n-3} &c. Et quia teſſera illa vel illæ, quæ favent ſuſcipienti, poteſt eſſe vel A vel B vel C &c. ſi ſit una: vel A & B, aut A & C, aut B & C &c. ſi ſint duæ: vel A, B & C, aut A, B & D &c. ſi ſint tres, &c. hinc numeri caſuum rurſus toties multiplicabuntur, quoties ex univerſis n teſſeris ſingulas, binas aut ternas &c. accipere licet; ſed licet hoc, per doctrinam combinationum ſecundâ parte tradendam, n, vel $\frac{n.n-1}{1.2}$, vel $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$ &c. vicibus: quare factâ hâc alterâ multiplicatione caſus emergent nbc^{n-1}, aut $\frac{n.n-1}{1.2}bbc^{n-2}$, aut $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}b^3c^{n-3}$ &c. quibus in unâ, duabus, aut tribus &c. duntaxat teſſeris, ſed quomodolibet ſumptis, eveniat quod ſuſceptum eſt; & conſequenter etiam caſus $\frac{n.n-1.n-2\ldots n-m+2}{1.2.3.4\ldots m-1}$ $b^{m-1}c^{n-m+1}$, quibus id eveniat in $m-1$ teſſeris. Cùm itaque omnes hi recenſiti caſus antagoniſtam ſuſcipientis, uti dictum, ludi victorem reddant, prætereaque in univerſis n teſſeris caſus exiſtant

F a^n, fiet

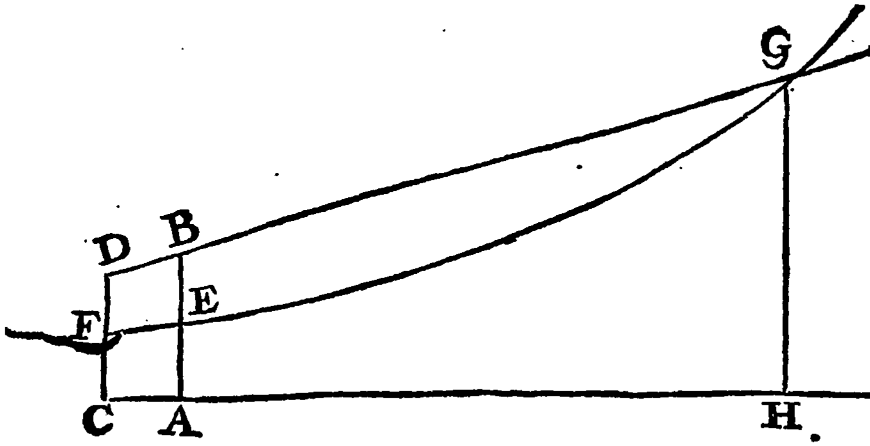
a^n, fiet per 1. Coroll. 3. ſors ejus $c^n + nbc^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} bbc^{n-2}$ $+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} b^3 c^{n-3} \ldots + \frac{n.n-1.n-2\ldots n-m+2}{1.2.3.4\ldots m-1} b^{m-1} c^{n-m+1} : a^n$, ut ſuprà. Quoniam autem in propoſitâ quæſtione, ſicut in præcedente, præcipuè hoc intenditur, ut inveſtigetur, quot aleæ jactibus expectationes luſoris & adverſarii incipiant æquari, ſive utrivis competere dimidium depoſiti; idcircò nunc porrò æquationem inſtituo inter repertam adverſarii ſortem & $\frac{1}{2}$, indeque valorem numeri n quoad poſſum determino. Ex. gr. Si cum Auctore ſcire deſiderem, quo jactuum numero quid bis præſtandum ſuſcipi poſſit, putà unâ teſſerâ ſenarius bis jaciendus, ut æquâ ſorte certetur; facio $\frac{c^n + nbc^{n-1}}{a^n} \infty \frac{1}{2}$, & habebo $a^n \infty 2c^n + 2nbc^{n-1}$ $\infty \overline{2c + 2nb}, c^{n-1}$, quo indicatur, numerum a ad eam poteſtatem elevandum eſſe, quæ proximè ſit æqualis producto ex poteſtate uno gradu depreſſiore ipſius c, & ducto ſummæ, quam numerus c cum ipſo b ducto in indicem poteſtatis a conſtituit. Hoc enim facto index poteſtatis a denotabit numerum jactuum, quo quid bis præſtandum ſuſcipi poteſt. Addo calculum pro Auctoris exemplo, in quo a numerus omnium caſuum unius teſſeræ valet 6, b numerus eorum quibus obtinetur ſenarius 1, & c eorum quibus non obtinetur 5:

			c	∞	5
a	∞	6	cc	∞	25
a^3	∞	216	c^4	∞	625
a^9	∞	10077696	c^8	∞	390625
a^{10}	∞	60466176	c^9	∞	1953125

$$a^9 \infty 10077696 < 10937500 \infty 28 \text{ in } 390625 \infty \overline{2c + 18b}, c^8,$$
$$a^{10} \infty 60466176 > 58593750 \infty 30 \text{ in } 1953125 \infty \overline{2c + 20b}, c^9.$$

quare cùm nona poteſtas ipſius a adhuc deficiat, decima verò excedat poteſtatem ipſius c uno gradu inferiorem & dictâ ratione multiplicatam, colligi debet, novem jactus nondum ſufficere, at jactibus decem cum lucro ſuſcipi poſſe, ut unâ teſſerâ bis ſenarius jaciatur.

Idem



Idem etiam per conſtructionem Geometricam non inconcinnam obtinere licet, ope Curvæ quam vocant Logarithmicæ: Inſiſtat axi C H Logarithmica quævis F E G, cui applicentur rectæ A E & C F, quæ ſint in ratione *a* ad *c*, producendæ ad duplam longitudinem in B & D; & agatur recta D B, occurrens curvæ in G: ſumtâ pro unitate C A, abſcindet demiſſa applicata G H in axe portionem C H ∞ *n*, numero jactuum, quo aliquid bis præſtandum ſuſcipi poteſt. Et quemadmodum hoc conſecuti ſumus occurſu lineæ rectæ & logarithmicæ: ſic numerum jactuum, quo quid ter præſtandum poteſt ſuſcipi, per interſectionem Parabolæ & logarithmicæ; & quo id quater ſæpiusve, ejusdem & altioris gradatim curvæ algebraicæ ope definire licet.

Cæterùm poſſemus & hîc, uti fecimus in præced. Propoſ. materiam hanc proſequi ulteriùs & inveſtigare ſortes plurium Aleatorum, qui ſinguli æquali an inæquali numero jactuum conſecutivè inſtituendorum ſuſciperent aliquid præſtare aliquoties; aliasque plures ejusmodi quæſtiones formare; niſi & brevitati conſulendum, & Lectoris induſtriæ quædam relinquenda eſſe viderentur.

Unicum tamen, ne hactenùs dicta ſiniſtrè acciperentur, monere adhuc operæ pretium duximus: nempe, Problemata hujus & præcedentis Propoſitionis, ubi quæritur expectatio ejus, qui aliquot aleæ jactibus quippiam ſemel vel aliquoties præſtandum ſuſcipit, ita

 eſſe

eſſe intelligenda, ut ſenſus ſit, etiam tum lucraturum qui ſuſcepit, ſi ſæpiùs quàm ſuſcepit præſtiterit. Nam ſi ſenſus eſſet, eum hoc caſu perditurum, aliud foret Problema, & aliæ naſcerentur expectationes, quæ quia in ſequentibus uſum habebunt, determinandæ nobis ſuperſunt, priusquàm hinc diſcedamus. Ut autem generalior fiat ſolutio, ponamus non in omnibus aleis æquè-multos regnare caſus, uti hucuſque ſuppoſuimus, ſed numerum eorum in diverſis jactibus utcunque variare, vocando in jactu

	Pr.	*Sec.*	*Tert.*	*Quart.*	*Quint.*
Num. caſuum omnium - - -	*a.*	*d.*	*g.*	*p.*	*s.*
eorum quib. quid præſtatur - -	*b.*	*e.*	*h.*	*q.*	*t.*
- - - *non præſtatur* - -	*c.*	*f.*	*i.*	*r.*	*u.*

quo poſito, ſi aliquot aleæ jactus, putà quinque ſint inſtituendi, & quæratur expectatio ad id præſtandum in nonnullis horum jactuum, ex. gr. in tribus primis, & non præſtandum in reliquis; conſiderare oportet, quòd quilibet b caſuum primi jactûs conjungi poſſit cum quolibet e caſuum ſecundi, & inde reſultantium caſuum be quilibet rursùs cum quolibet h caſuum tertii, quod facit beh caſus: & pari modo, quòd quilibet r caſuum quarti jactûs conjungi poſſit cum quolibet u caſuum quinti, quod caſus ſuppeditat ru; hinc cùm & horum ſinguli cum quolibet priorum beh combinari queant, erit numerus omnium caſuum quibus contingere poteſt, ut in primis tribus jactibus præſtetur præſtandum, in poſtremis duobus non præſtetur, $behru$; & quia ob ſimilem rationem numerus omnium omnino caſuum in univerſis quinque jactibus eſt $adgps$, ſequitur expectationem quæſitam per 1. Cor. 3. fore $\frac{behru}{adgps}$. unde talis formatur

Regula

pro cognoſcendâ ſorte Aleatoris, cui plures aleæ jactus conceſſi, & qui præcisè in certis quibusdam, non aliis jactibus quippiam præſtare tenetur.

PRoductum continuum ex numeris caſuum, quibus quid præſtatur in iis jactibus, in quibus præſtari debet, & eorum quibus non præſtatur, ubi non præſtari debet, dividatur per productum conti-

continuum ex numeris omnium caſuum in jactibus univerſis; & quotiens exhibebit quæſitum.

Coroll. 1. Si iidem numeri caſuum regnent in omnibus aleis, hoc eſt, ſi ſinguli $d, g, p, s \infty a$; ſinguli $e, h, q, t \infty b$; & ſinguli $f, i, r, u \infty c$: expectatio inventa $\frac{behru}{adgps}$ vertetur in hanc $\frac{b^3c^2}{a^5}$; & generaliùs in $\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$, ſumto n pro numero omnium jactuum, & m pro numero eorum, in quibus præſtandum præſtari debet.

Cor. 2. Si iidem numeri caſuum regnent in omnibus aleis, & determinatus etiam ſit numerus alearum ſeu jactuum, quibus quid præſtari debet; ipſi verò jactus non ſint definiti, ſed quomodolibet accipiendi; putà, ſi 5 jactus ſint inſtituendi, & in tribus eorum quibuslibet quid præſtandum ſit, patet hinc quantitatem expectationis inventam toties adhuc multiplicari, quoties ex jactibus quinque diverſimodè terni, h. e. generaliter, ex n rebus diverſæ m res accipi poſſunt. Poteſt autem hoc fieri, per Combinationum doctrinam ſeq. part. tradendam, $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}\ldots\overline{n-m+1}}{1.2.3.4\ldots m}$ ſive (quòd perinde) $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}\ldots\overline{m+1}}{1.2.3.4\ldots\overline{n-m}}$ vicibus: quare nunc expectatio ſuſcipientis valebit $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}\ldots\overline{n-m+1}}{1.2.3.4\ldots m}, \frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$, vel $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}\ldots\overline{m+1}}{1.2.3.4\ldots\overline{n-m}}, \frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$.

PROPOSITIO XIII.

Si cum alio ludam duabus teſſeris unum ſolummodò jactum, hac conditione, ut, ſi ſeptenarius eveniat, ego vincam; at ille, ſi denarius obtingat; ſi verò quidquam aliud accidat, ut tum id quod depoſitum eſt æqualiter dividamus: Invenire qualis iſtius pars cuique noſtrûm debeatur.

 Quo-

Quoniam 36 jactuum, qui duabus teſſeris proveniunt, 6 jactus exiſtunt ſeptem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, reſtant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare poſſunt; id quod ſi fiat, cuique noſtrûm debebitur $\frac{1}{2}a$. N Verùm ſi id non obtingat, habebo 6 caſus, quibus vincam, id eſt, ut a habeam; & 3 caſus, quibus diverſum eveniat, nihilque habeam: id quod per II. Propoſitionem, tantundem eſt ac ſi tali caſu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 caſus ad $\frac{1}{2}a$, & 9 caſus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per II. Propoſitionem, tantundem eſt ac $\frac{13}{24}a$. O Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.

Annotat.

N *Verùm ſi id non obtingat, habebo 6 caſus &c.*] Auctor priùs quærit expectationem ejus, qui 6 habet caſus ad vincendum & 3 ad perdendum, quæ expectatio eſt $\frac{2}{3}a$; eâque demum mediante infert quæſitum: ſed poteſt idem quoque non cognitâ illâ expectatione immediatè concludi; nam 27 caſus ad $\frac{1}{2}a$, 6 caſus ad a, & 3 ad o, quos habeo ſi propoſitâ conditione ludo, etiam tantundem valent per 1. Coroll. 3, ac $\frac{13}{24}a$; uti quoque 27 caſus ad $\frac{1}{2}a$, 3 ad a, & 6 ad o, quos habet colluſor meus, ei per idem Cor. ſortem pariunt $\frac{11}{24}a$.

O *Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.*] Reſiduum nempe totius depoſiti. Quia enim ambo ſimul finito luſu infallibiliter totum depoſitum, nec plus nec minus, impetramus, hinc etiam amborum ſimul expectatio per Axioma noſtrum integrum depoſitum exhaurire debet, uti quoque in Propoſ. IV. ad literam C notavimus. Secùs foret, ſi qui caſus darentur, quibus & alii de depoſito participarent; veluti, ſi poſtrema conditio luſui annexa juberet, ut id quod depoſitum eſt in pauperes erogetur; tum enim propter 6 caſus ad a, & 30 ad o, non niſi haberem $\frac{1}{6}a$; & colluſor propter 3 caſus ad a, & 33 ad o, tantùm haberet $\frac{1}{12}a$; reſiduum verò depoſiti $\frac{3}{4}a$ pauperibus deberetur, qui propterea & ipſi in rationem ſortis venire cenſendi eſſent.

PRO-

Propositio XIV.

Si ego & alius duabus teſſeris alternatim jaciamus, hac conditione, ut ego vincam ſimul atque ſeptenarium jaciam, ille verò quàm primùm ſenarium jaciat; ita videlicet, ut ipſi primum jactum concedam: Invenire rationem meæ ad ipſius ſortem.

Ponatur, ſortem meam valere x, & id quod depoſitum eſt vocari a; eritque ſors alterius $\infty\, a - x$. Et patet, quandocunque ipſius vices jaciendi revertuntur, ſortem meam tum rurſus debere eſſe $\infty\, x$. At quandocunque meæ vices ſunt ut jaciam, ſors mea pluris æſtimanda eſt. Ponatur itaque pro ejus valore y. Jam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 teſſeris, qui colluſori meo ſenarium dare luſûſque victorem reddere poſſunt; & 31 jactus, quibus diverſum eveniat, id eſt, qui meas jaciendi vices promovent: habebo, priusquàm jacit, 5 caſus ad obtinendum o, & 31 caſus ad obtinendum y. id quod per III. Propoſitionem valet $\frac{31y}{36}$. Poſuimus autem caſum meum à principio eſſe $\infty\, x$. Quocirca erit $\frac{31y}{36} \infty\, x$, adeoque $y \infty \frac{36x}{31}$. Deinde poſitum fuit, vicibus meis venientibus, ſortem meam valere y. Ego verò jacturus, habeo 6 caſus ad obtinendum a, quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 caſus, quibus vices colluſoris mei revertuntur, id eſt, ut mihi obtineam x. id quod per III. Propoſitionem valet $\frac{6a+30x}{36}$. Hoc autem cùm ſit $\infty\, y$, erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} \infty\, y$, $\frac{30x+6a}{36} \infty \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x \infty \frac{31a}{61}$, valor meæ ſortis. Et per conſequens colluſoris mei erit $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio ſortis meæ ad illius ſortem ſit, ut 31 ad 30.

Annotat.

Auctor in hoc Problemate primùm adhibere cogitur analyſin algebrai-

algebraïcam, cùm in præcedentibus ſolâ ſyntheſi uſus fuiſſet: cujus differentiæ ratio eſt, quòd in illis omnibus expectatio quæſita fluebat ex aliis expectationibus vel in totum cognitis & datis, vel incognitis quidem, at naturâ prioribus ac ſimplicioribus, & quæ ab hâc viciſſim non dependebant; quapropter incipiendo ab omnium ſimpliciſſimis earum ope gradatim pergere poterat ad enodandos alios caſus magis magisque compoſitos absque analyſi ullâ. Secùs verò ſe hîc res habet; nam expectationem meam, quam poſſideo cùm colluſorem ordo jaciendi tangit, Auctoris more æſtimare non poſſum, niſi cognitam habuero ſortem, quam acquiro ubi vices jaciendi ad me devolvuntur: ſed & hanc cognoſcere nequeo, niſi priorem illam compertam habeam, quæ tamen ea ipſa eſt quam quærere intendo; unde cùm utraque ſit incognita, & altera ab alterâ viciſſim dependeat, non poſſunt Auctoris veſtigiis inſiſtendo aliter quàm analyſeos ope ex ſe mutuò elici: id quod operæ pretium eſt obſervâſſe, ut utriusque methodi diſcrimen, & quando hæc illave in uſum vertenda ſit, perſpicuo aliquo exemplo pateret.

Dixi, Auctoris veſtigiis inſiſtendo non poſſe; datur enim adhuc alia peculiaris via, quâ quæſitum conſequi poſſum citra analyſin ullam, & quam in ſequentibus quoque utiliter adhibere licet. Fingamus loco duorum alternatim ludentium infinitos Colluſores, quibus ſingulis ordine uni poſt alterum ſinguli tantùm concedantur jactus, eâ lege, ut cui colluſorum in locis imparibus ſenarius, aut cui in paribus ſeptenarius primùm evenerit, ille vincat atque depoſitum auferat: quo pacto liquet, ſecundum colluſorem vincere non poſſe, niſi duorum primorum jactuum ſolus poſterior præſtet quod præſtare debet; nec tertium victoriâ potiri poſſe, niſi trium primorum jactuum ſolus tertius id præſtet; nec quartum, niſi quatuor primorum ſolus quartus, & ita conſequenter. Quare, ſi pro 5 & 31, numeris caſuum quibus in teſſeris duabus evenire poteſt ſenarius vel non evenire, ponamus b & c; item pro 6 & 30 numeris caſuum, quibus ſeptenarius obtingere vel non obtingere poteſt, e & f; pro 36 verô numero omnium caſuum $b+c$, vel $e+f$, ſcribamus a: inveniemus per Regulam in fine annot. Prop. XII. traditam ſingulorum Colluſorum expectationes, ut ſequitur:

Colluſ.

Colluſ.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	&c.
Expect.	$\frac{b}{a}$	$\frac{ce}{aa}$	$\frac{bcf}{a^3}$	$\frac{ccef}{a^4}$	$\frac{bccff}{a^5}$	$\frac{c^3eff}{a^6}$	$\frac{bc^3f^3}{a^7}$	$\frac{c^4ef^3}{a^8}$	&c.

Quòd ſi nunc in primi, tertii, quinti & reliquorum imparibus numeris deſignatorum Colluſorum locum unum ſolum mente ſubſtituam, meque ipſum in locum ſecundi, quarti, ſexti, & cæterorum, qui in pari graduum numero ſunt collocati, conſtabit hunc ipſum fore caſum præſentis quæſtionis, atque inſuper expectationes utriusque noſtrûm æquari debere expectationibus ſimul ſumtis omnium illorum colluſorum, in quorum locum ſuffecti ſumus. Sors itaque mea exprimetur per $\frac{ce}{aa} + \frac{ccef}{a^4} + \frac{c^3eff}{a^6} + \frac{c^4ef^3}{a^8}$ &c. & colluſoris mei ſors per $\frac{b}{a} + \frac{bcf}{a^3} + \frac{bccff}{a^5} + \frac{bc^3f^3}{a^7}$ &c. ſeries ſcil. infinitas quantitatum geometricè progredientium in ratione aa ad cf, & quarum prior ſummam conficit $\frac{ce}{aa-cf}$, poſterior $\frac{ab}{aa-cf}$; ſic ut ſors mea ad ſortem illius ſe habeat, ut ce ad ab, ſeu reſtitutis valoribus lit. a, b, c & e, ut 31 ad 30, planè ut ſuprà.

APPENDIX.

Coronidis loco Auctor Tractatui ſuo ſubjunxit ſequentia quinque Problemata, ſed omiſſâ analyſi vel demonſtratione, quam Lectori eruendam reliquit. Hanc itaque nos partim hîc ſupplere, partim in Librum ſecundum rejicere coacti ſumus.

PROBLEMA I.

A & B unà ludunt duabus teſſeris, hâc conditione, ut A vincat, ſi ſenarium jaciat, at B ſi ſeptenarium jaciat. A primò unum jactum inſtituat; deinde B duos jactus conſequenter; tum rurſùs A duos jactus, atque ſic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B? Reſp. ut 10355 ad 12276.

Solutio: Ponamus, ſortem ipſius A valere t, tum cùm ludere incipit; at cùm ordo jaciendi colluſorem B tangit, x: cùm B ſemel luſit, y: cùm bis, hoc eſt, cùm ludendi vices ad ipſum A redeunt, z. Quoniam enim omnes iſtæ ſortes differentes ſunt & incognitæ, earumque præcedens quælibet à ſequente & poſtrema viciſſim à primâ dependet, uti ex ſubjunctâ operatione conſtabit, non poterit Problema iſtud Auctoris ſaltem methodo, per ea quæ ad Propoſ. ult. annotata ſunt, aliter quàm mediante analyſi algebraïcâ expediri. Primò itaque quia in 36 jactibus duarum teſſerarum reperiuntur 5, qui ipſi A ſenarium dare, eumque ludi victorem reddere poſſunt; & 31 jactus, qui ordinem jaciendi in colluſorem B transferunt; habebit A, tum cùm ludum inchoat, 5 caſus ad obtinendum a (id quod depoſitum eſt) & 31 ad obtinendum x; id quod per ſæpiùs laudatam Propoſ. valet $\frac{5a+31x}{36}$: cùm autem eadem à principio ſors vocata fuerit t, erit propterea $t \propto \frac{5a+31x}{36}$. Deinde cùm ordo ludendi tangit colluſorem B, habet A 6 caſus ad obtinendum nihil (quandoquidem 6 ſunt jactus 7 punctorum, qui adverſario ejus favent) & 30 caſus ad acquirendum y, quod ſortem ipſi parit $\frac{5}{6}y$. Eademmet verò ſors ſuprà nobis dicta fuit x; quare $x \propto \frac{5}{6}y$. Porrò cum colluſor B, abſoluto primo jactu alterum aggreſſurus eſt, habet A ob eandem rationem 6 caſus ad o, & 30 ad ſortem ſequentem z; & ſiquidem obtinere tum etiam ſupponatur y, erit $y \propto \frac{5}{6}z$. Denique vicibus ludendi ad ipſum A revertentibus, quo caſu ejus expectationem z vocamus, habet is 5 caſus ad a, ſi nempe ſenarium jaciat, & 31 caſus ad obtinendam ſortem priſtinam t, ſi ſecùs eveniat; quandoquidem tunc colluſores in eo ſtatu erunt, in quo fuerant à principio, dum ipſi A unus ſupereſt jactus, quem excipere debent duo jactus à B inſtituendi, & hos duo alii ab A, atque ita deinceps, omnino ſicut ab initio: conſtat autem 5 caſus ad a, & 31 ad t valere $\frac{5a+31t}{36}$; quocirca $z \propto \frac{5a+31t}{36}$. Inventis hâc ratione tot æquationibus, quot ſuppoſitæ fuerunt literæ incognitæ, oportet à poſtremis ad primas retrogredi, ſubſtituendo valorem z per ultimam

mam repertum in proximè præcedente, ut habeatur $y \infty \frac{5a + 155t}{216}$; & hunc valorem in antepenultimâ, ut fiat $x \infty \frac{125a + 775t}{1296}$; ac tandem valorem iſtum in primâ; quâ ratione ſors quæſita habetur $t \infty \frac{10355a}{22631}$, & relinquetur pro ſorte colluſoris B $\frac{12276a}{22631}$. unde ſors A ad ſortem B erit, ut 10355 ad 12276; uti Auctor invenit.

Idem verò etiam aliquantò compendioſiùs inveſtigari poteſt, adhibitis tantùm tribus literis incognitis t, x & z, prætereundo ſortem y, quam acquirit A, poſtquàm B uno jactu defunctus eſt. Ex Annot. Propoſ. XI. conſtat, quòd ſors ejus, qui duobus jactibus ſemel ſeptenarium jacere ſuſciperet, eſſet $\frac{11}{36}$ depoſiti (quippe cùm a numerus omnium jactuum, ad c numerum eorum quibus non obtinetur ſeptenarins, eſt in ratione 6 ad 5; & propterea $\frac{aa-cc}{aa} \infty \frac{11}{36}$) unde, per ea quæ *ibid.* ad lit. I. monuimus, concludendum, 11 eſſe caſus, quibus colluſor B ludendi vicibus ad ſe devolutis alterutro ſuorum jactuum ſeptenarium jaciat & vincat, ipſeque A nihil acquirat; & 25 alios, quibus id neutro jactuum præſtet, ludendique ordo inde ad A reverſus huic ſortem z pariat; id quod ipſi A, qui eo ſtatu poſſidere ſupponitur x, tantundem valet ac ſi haberet $\frac{25z}{36}$; adeò ut $x \infty \frac{25z}{36}$. Cæteris enim poſitis ut priùs, ſi valor ipſius z ſuprà inventus hic ſubſtituatur, invenietur ut ibi $x \infty \frac{125a + 775t}{1296}$, & conſequenter $t \infty \frac{10355}{22631}a$.

Atque hinc perſpicitur methodus Auctoris, quam imitari convenit in omnibus ſimilibus ſortitionibus & ludis aleæ, in quibus plures continuò ſortes incognitæ ſe mutuò excipiunt, dummodò poſt jactus aliquot priſtina recurrat rerum facies, eædemque revertantur ſortes incognitæ, quas aleatores ab initio ludi habuêre. Sed non tam facilè apparet, quo pacto illa Problemata tractanda ſint, in quibus ludum proſequendo ſortes nunquam in orbem redeunt, ſed ſubinde aliæ novæ prodeunt à prioribus diverſæ & æquè ignotæ, idque in infinitum; cujusmodi quidem nulla in hoc Auctoris Tractatu habentur. Eorum aliqua propoſui olim in Ephemer.

 Erud.

Erud. Coll. 1685. art. 25, ſpe fretus fore, ut nonnemo illorum ſolutionem aggredi dignaretur, quam cùm toto quinquennio nemo dediſſet, ipſemet poſteà in Actis Erud. Lipſ. m. Maj. 1690. communicavi, ſecuto mox etiam fundamento ſolutionis ab ingenioſiſſimo Leibnitio ibid. m. Jul. ejuſdem anni occultiùs exhibito, quod ego nunc apertiùs exponam. Prius autem oſtendam, quo pacto per illud præſens Auctoris Problema ſolvatur; nec enim differt hoc fundamentum ab eo, quo ad ſolutionem quoque præced. Propoſ. in annotat. fui uſus, eâdemque promiſcuè facilitate applicatur ad quæſtiones, in quibus eædem perpetuò expectationes in circulum redeunt, & in quibus nulla talis earum datur apocataſtaſis, hoc ſolo diſcrimine, quòd in prioribus ad ſeries infinitas unam pluresve, quarum ſummæ unâ aliquâ quantitate exprimi poſſunt; in poſterioribus verò ad alias ſeries haud æquè ſummabiles nos deducat.

Supponamus infinitos luſores, qui ſinguli ad ſingulos ſucceſſivè jactus admittantur, & quorum primus, quartus & quintus, octavus & nonus, & ſic porrò intermiſſis duobus ſemper duo ſequentes, ſenarii jactu: cæteri, ſecundus & tertius, ſextus & ſeptimus &c. ſeptenarii jactu vincere poſſint. Ac tum per Regulam annot. Prop. XII. annexam quærantur ſingulorum expectationes, quæ ſumto valore lit. a, b, c, e & f, ut in annot. præc. Prop. ita habebunt:

Coll.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	&c.
	A.	B.	B	A	A	B	B	A	A	B	B	A	
Exp.	$\frac{b}{a}$	$\frac{ce}{aa}$	$\frac{cef}{a^3}$	$\frac{bcff}{a^4}$	$\frac{bccff}{a^5}$	$\frac{c^3eff}{a^6}$	$\frac{c^3ef^3}{a^7}$	$\frac{bc^3f^4}{a^8}$	$\frac{bc^4f^4}{a^9}$	$\frac{c^5ef^4}{a^{10}}$	$\frac{c^5ef^5}{a^{11}}$	$\frac{bc^5f^6}{a^{12}}$	&c.

ſubſtitutis igitur in locum omnium eorum, qui ſenario vincunt, uno ſolo colluſore A; & in locum eorum, qui ſeptenario vincunt, uno ſolo B, habebimus caſum præſentis Problematis, indeque concludemus, ſortem ipſius A fore $\frac{b}{a} + \frac{bcff}{a^4} + \frac{bccff}{a^5} + \frac{bc^3f^4}{a^8} + \frac{bc^4f^4}{a^9} + \frac{bc^5f^6}{a^{12}}$ &c. & ſortem ipſius B, $\frac{ce}{aa} + \frac{cef}{a^3} + \frac{c^3eff}{a^6} + \frac{c^3ef^3}{a^7} + \frac{c^5ef^4}{a^{10}} + \frac{c^5ef^5}{a^{11}}$ &c. Et quia in utrâque hâc ſerie termini locorum tum

parium

parium tum imparium ſeparatim accepti Geometricas progreſſiones conſtituunt decreſcentes in ratione $\frac{ccff}{a^4}$, liquet hinc etiam ambarum ſummas in poteſtate haberi. Reperitur autem ſumma prioris ſeriei $\frac{a^3b + bcff}{a^4 - ccff}$, & poſterioris $\frac{aace + acef}{a^4 - ccff}$; ſic ut ratio ſortis A ad ſortem B ſit, ut $a^3b + bcff$ ad $aace + acef$, hoc eſt (factis $a = 36$, $b = 5$, $c = 31$, $e = 6$, & $f = 30$) ut 372780 ad 441936, ſeu ut 10355 ad 12276, prorsùs ut ſuprà.

Sequuntur nunc exempla talium quæſtionum, ubi nulla datur ſortium apocataſtaſis: Sint duo Colluſores A & B certatim ludentes duabus teſſeris eâ lege, ut qui primus ſeptenarium jecerit vincat. Quæruntur eorum expectationes, ſi ludere debeant hoc ordine

I. A ſemel, B ſemel, A bis, B ſemel, A ter, B ſemel, A quater, B ſemel &c.
II. A ſemel, B ſemel, A ſemel, B bis, A ſemel, B ter, A ſemel, B quater &c.
III. A ſemel, B ſemel, A bis, B bis, A ter, B ter, A quater, B quater &c.
IV. A ſemel, B bis, A ter, B quater, A quinquies, B ſexies, A ſepties &c.

Hîc methodus analytica Auctoris nil proficit, ſed mea, eâdem quâ anteà facilitate quæſitum determinat. Loco duorum alternis ludentium A & B fingo rurſus luſores infinitos, quibus ſingulis ſinguli tantùm concedantur jactus, & quæro ſingulorum expectationes. Reperitur autem per Coroll. 1. Regulæ ad Prop. XII. notatæ, ob numeros caſuum a, b & c eosdem in omnibus aleis, expectatio cujusvis generaliter $\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$, ubi m numerus jactuum, quibus ſeptenarius (unus b caſuum) præſtandus eſt, perpetuò valet 1; & n numerus omnium ab initio jactuum ſucceſſivè valet 1, 2, 3, 4 &c. his ergò ſubſtitutis ſequens naſcetur laterculus

Coll.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	&c.
	A	B	B	A	A	A	B	B	B	B	A	A	A	A	A	
Exp.	$\frac{b}{a}$	$\frac{bc}{aa}$	$\frac{bcc}{a^3}$	$\frac{bc^3}{a^4}$	$\frac{bc^4}{a^5}$	$\frac{bc^5}{a^6}$	$\frac{bc^6}{a^7}$	$\frac{bc^7}{a^8}$	$\frac{bc^8}{a^9}$	$\frac{bc^9}{a^{10}}$	$\frac{bc^{10}}{a^{11}}$	$\frac{bc^{11}}{a^{12}}$	$\frac{bc^{12}}{a^{13}}$	$\frac{bc^{13}}{a^{14}}$	$\frac{bc^{14}}{a^{15}}$	&c.

tum loco horum colluſorum repono duos A & B, utrique ea aſſignando loca, quæ juxta quæſtionis tenorem illi competunt, tan-

demque expectationes omnes his locis reſpondentes ſummatim colligo, ad conſtituendas expectationes totales utriusque. Sic quia juxtà conditionem exempli 4ti ipſi A debetur jactus primus, deinde 4tus, 5tus, 6tus, porrò 11, 12, 13, 14, 15tus, & ſic deinceps, hinc expectationes colluſorum his numeris deſignatorum, primi, 4ti, 5ti, 6ti &c. in peculiarem ſeriem compingo; atque expectationes 2di, 3tii, 7mi, & reliquorum, in quorum locum B ſuccedit, in aliam ſeriem; quo pacto fiet ſors ipſius A $\infty \frac{b}{a} + \frac{bc^3}{a^4} + \frac{bc^4}{a^5} + \frac{bc^5}{a^6} + \frac{bc^{10}}{a^{11}} + \frac{bc^{11}}{a^{12}} + \frac{bc^{12}}{a^{13}} + \frac{bc^{13}}{a^{14}} + \frac{bc^{14}}{a^{15}} +$ &c. & ſors ipſius B $\infty \frac{bc}{aa} + \frac{bcc}{a^3} + \frac{bc^6}{a^7} + \frac{bc^7}{a^8} + \frac{bc^8}{a^9} + \frac{bc^9}{a^{10}} + \frac{bc^{15}}{a^{16}} + \frac{bc^{16}}{a^{17}} + \frac{bc^{17}}{a^{18}} +$ &c. indeque porrò, eliminando b ubique, & ejus loco ſurrogando $a - c$, ſors A $\infty 1 - \frac{c}{a} + \frac{c^3}{a^3} - \frac{c^6}{a^6} + \frac{c^{10}}{a^{10}} - \frac{c^{15}}{a^{15}}$ &c. ut & ſors B $\infty \frac{c}{a} - \frac{c^3}{a^3} + \frac{c^6}{a^6} - \frac{c^{10}}{a^{10}} + \frac{c^{15}}{a^{15}}$ &c. prioris complementum ad unitatem.

Idem adhuc aliter ita eruo: Pono denuò loco duorum A & B, infinitos luſores A, B, C, D, E, F, G, &c. ſed unicuique eorum tot jactus continuè inſtituendos tribuo, quot pro tenore quæſtionis conceduntur alterutri A vel B, quoties ludendi ordo de novo ipſum tangit. Verbi gratiâ, in exemplo antè allato quarto, pro eo quòd A ludere debet ſemel, B bis, hinc iterum A ter, B quater &c. concipio A ludere debere ſemel, B bis, alium C ter, alium D quater &c. tum ſeparatim uniuscujusque ſortem inveſtigo, attendendo ad numerum jactuum cùm ab ipſo inſtituendorum, tum etiam ab iis ſimul omnibus, qui eum ludendo præcedere debent; quod nullo negotio fit, poſtquàm jam ſupra in annotatis Propoſ. XI. (poſitis illorum numero n & horum s) ſortem hanc generaliter oſtendimus eſſe $\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}} \infty \frac{c^s}{a^s} - \frac{c^{n+s}}{a^{n+s}}$; ſumtis enim in 4to exemplo pro n ordine numeris 1, 2, 3, 4 &c. & pro s numeris 0, 1, 3, 6, 10 &c. ceu ſummis ipſorum 1, 2, 3, 4 &c. ab initio collectis, emergent ſtatim ſingulorum ſortes, ut ſequitur

Colluſ.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	&c.
Sortes:	$1 - \frac{c}{a}$.	$\frac{c}{a} - \frac{c^3}{a^3}$.	$\frac{c^3}{a^3} - \frac{c^6}{a^6}$.	$\frac{c^6}{a^6} - \frac{c^{10}}{a^{10}}$.	$\frac{c^{10}}{a^{10}} - \frac{c^{15}}{a^{15}}$.	$\frac{c^{15}}{a^{15}} - \frac{c^{21}}{a^{21}}$.	$\frac{c^{21}}{a^{21}} - \frac{c^{28}}{a^{28}}$.	&c.

quo

quo facto nil ſupereſt aliud, quàm ut omnium luſorum in locis imparibus A, C, E, G &c. nec non omnium in paribus B, D, F &c. expectationes in unam ſummam colligantur ad producendas, quas antea, expectationes unius A & unius B alternatim ludentium, utpote quas ſummis illis æquari debere quivis per ſe videt. Nec differret operatio, ſi tres, quatuor pluresve colluſores, in quæſtione ſupponerentur.

Utrovis autem horum modorum etiam cæterarum quæſtionum exempla ſolvuntur. Solutiones omnium ſic habent (ſumto compendii gratiâ $m \infty \frac{c}{a}$:

In qu. I. ſors. $A \infty 1 - m + m^2 - m^4 + m^5 - m^8 + m^9 - m^{13} + m^{14} - m^{19} +$ &c.
$B \infty + m - m^2 + m^4 - m^5 + m^8 - m^9 + m^{13} - m^{14} + m^{19} -$ &c.
II . . $A \infty 1 - m + m^2 - m^3 + m^5 - m^6 + m^9 - m^{10} + m^{14} - m^{15} +$ &c.
$B \infty + m - m^2 + m^3 - m^5 + m^6 - m^9 + m^{10} - m^{14} + m^{15} -$ &c.
III . . $A \infty 1 - m + m^2 - m^4 + m^6 - m^9 + m^{12} - m^{16} + m^{20} - m^{25} +$ &c.
$B \infty + m - m^2 + m^4 - m^6 + m^9 - m^{12} + m^{16} - m^{20} + m^{25} -$ &c.
IV . . $A \infty 1 - m + m^3 - m^6 + m^{10} - m^{15} + m^{21} - m^{28} + m^{36} - m^{45} +$ &c.
$B \infty + m - m^3 + m^6 - m^{10} + m^{15} - m^{21} + m^{28} - m^{36} + m^{45} -$ &c.

Singulæ hæ ſortes exprimuntur, ut videre eſt, per ſeriem aliquam infinitam, in quâ ſigna + & — perpetuò alternant, & cujus termini ex ſerie hâc continuè proportionalium $1 . m . m^2 . m^3 . m^4 . m^5$ &c. per ſaltus inæquales ſunt excerpti, quod impedit illius ſummationem abſolutam; Sed facilis eſt approximatio in numeris quantumlibet exactis. Sic poſitis $a \infty 36$, numero omnium caſuum in teſſeris duabus, & $c \infty 30$ numero eorum quibus non obtinetur præſcriptus ſeptenarius, adeoque $\frac{c}{a}$ ſeu $m \infty \frac{30}{36} \infty \frac{5}{6}$, reperitur ſors ipſius A in primo exemplo $\frac{71931}{100000}$, in 2do $\frac{40058}{100000}$, in 3tio $\frac{59679}{100000}$, in 4to $\frac{52392}{100000}$; ubique non unâ centies milleſimâ parte major minorve, ac proinde ratio ſortis A, ad ſortem B in 1mo ut 71931 ad 28069, in 2do ut 40058 ad 59942, in 3tio ut 59679 ad 40321, in 4to ut 52392 ad 47608.

Cæterùm qui examinabit indices poteſtatum quantitatis *m*,

quæ

quæ terminos harum ſerierum conſtituunt, deprehendet illorum differentias ubique coïncidere cum ipſis numeris jactuum, qui colluſoribus A & B juxtà quæſtionis tenorem alternatim inſtituendi ſunt: Ita in primâ ſerie $1 - m + m^2 - m^4 + m^5 - m^8 + m^9$ &c. indices poteſtatum ordine ſunt 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9 &c. & indicum differentiæ 1, 1, 2, 1, 3, 1 &c. præcisè reſpondentes numeris jactuum, quos hypotheſis primæ quæſtionis requirit, quippe quæ ipſi A 1, B 1, A 2, B 1, A 3, B 1 &c. jactus ordine tribuit. Operæ pretium autem eſt obſervare, hoc adeò generale eſſe, ut etiam valeat in iis exemplis, in quibus duobus alternatim ludentibus numeri jactuum aſſignantur, quales fortuitò è calamo ſcribentis fluere poſſunt, nullâ certâ & conſtante ratione progredientes; cùm iſta conſideratio regulam nobis ſuppeditet amborum ſortes momento exhibendi, quæ talis:

Regula pro cognoſcendâ ſorte duorum certatim ludentium, donec alteruter eorum vincat, quando utrique alternis vicibus aliquot aleæ jactus continuè inſtituendi conceduntur ſecundùm quosvis numeros datos & in infinitum continuatos.

(Pono autem eosdem regnare numeros caſuum ſeu eundem manere valorem quantitatis $\frac{c}{a}$ vel m in omnibus aleis.)

SCribantur ordine primò dati numeri jactuum utrique conceſſorum, dein ſummæ eorum ab initio collectæ; tum ſummæ hæ fiant indices totidem poteſtatum quantitatis *m*, quibus per ſigna + & — alternatim connexis habetur expectatio primi ludentis; omiſſâ verò unitate quæ ſemper primus ſeriei terminus eſt, ſignisque cæterorum inverſis habetur expectatio colluſoris. Ex. gr. Si alternatim inſtituere jubeantur, ipſe A jactus tres, B unum, A 4,

B 1,

B 1, A 5, B 9, & ſic deinceps in infinitum, putà ſecundùm numeros Cyclometricos Ludolfi, qui nullâ determinatâ lege progrediuntur, erunt ordine numeri jactuum -- 3 1 4 1 5 9 2 6 5 &c. horumque ſummæ ab initio collectæ, 0, 3, 4, 8, 9, 14, 23, 25, 31, 36, &c. ac proinde ſors ipſius

A, $1 - m^3 + m^4 - m^8 + m^9 - m^{14} + m^{23} - m^{25} + m^{31} - m^{36} +$ &c.

B, $+ m^3 - m^4 + m^8 - m^9 + m^{14} - m^{23} + m^{25} - m^{31} + m^{36} -$ &c.

Nota, ſi numerus omnium jactuum ſit limitatus, ultra quem etſi neuter adhuc vicerit ludere prohibeantur, eadem regula valebit, niſi quòd ultimus terminus, cujus exponens ex omnium jactuum ſummâ conflatur, in illâ ſerie in quâ ſignum + habet redundat, adeoque abjiciendus, quo fit, ut expectationes amborum ſimul ſumptæ eodem illo termino deficiant ab unitate. Sic in præced. exemplo ſi poſt ultimò adſcriptum quinarium, h. e. poſt jactum 36tum eſſet ſubſiſtendum, fieret

ſors A, $1 - m^3 + m^4 - m^8 + m^9 - m^{14} + m^{23} - m^{25} + m^{31} - m^{36}$.

ſors B, $+ m^3 - m^4 + m^8 - m^9 + m^{14} - m^{23} + m^{25} - m^{31}$.

adeoque amborum ſimul $1 - m^{36}$.

PROBLEMA II.

TRes Colluſores A, B & C aſſumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri exiſtunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipſorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio ſit penès A, ſecunda penès B, & tertia penès C, & tum ſequens rurſus penès A, atque ſic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura ſit ratio illorum ſortium?

Senſus hujus Problematis ambiguus eſt, unde variis quoque ſolutionibus locus. Vel enim ſupponitur, electos calculos poſt ſingulas electiones in urnam recondendos eſſe, priusquàm ſequens eligit, ſic ut numerus eorum perpetuò maneat idem; vel non eſſe recondendos, ſic ut eorum numerus continuò decreſcat: deinde

ſupponi poteſt, vel à ſingulis aſſumptos eſſe 12 calculos, vel ab univerſis in commune.

I. Si calculi poſt ſingulas electiones ſint recondendi (quo quidem ſenſu nil intereſt, ſive in commune ſeu à ſingulis 12 calculi aſſumpti fuerint) quæſitæ colluſorum ſortes hâc ratione inveſtigantur:

1. *Methodo Auctoris.* Vocetur ſors primi x, ſecundi y, tertii z. Jam primus A cùm ludere incipit, 4 habet caſus ad vincendum ſeu obtinendum depoſitum, (ob 4 calculos albos), & 8 caſus (ob 8 nigros), quibus perdit ſuam præcedentiam & transfertur in ſtatum tertii, adeoque acquirit ſortem z; quod valet $\frac{4+8z}{12}$ $\infty \frac{1+2z}{3}$; ac proinde ſors primi $x \infty \frac{1+2z}{3}$. Ob eandem rationem habet ſecundus B, cùm primus ludum inchoat, 4 caſus ad obtinendum nihil, & 8 caſus ad acquirendam præcedentiam, quâ transfertur in ſtatum primi acquiritque ſortem x; quod valet $\frac{8}{12}x \infty \frac{2}{3}x$, quare ſecundi ſors $y \infty \frac{2}{3}x$. Pariter quoque tertius C à principio habet 4 caſus ad nihilum, & 8 ad obtinendum ſecundum eligendi locum ſive ſecundi ſortem y; quod tantundem eſt ac $\frac{2}{3}y$; quocircà tertii ſors $z \infty \frac{2}{3}y$, hoc eſt, $y \infty \frac{3}{2}z$; & quia y etiam reperta fuit $\infty \frac{2}{3}x$, habetur $\frac{3}{2}z \infty \frac{2}{3}x$, hoc eſt, $z \infty \frac{4}{9}x$, qui valor ipſius z in primâ æquatione $x \infty \frac{1+2z}{3}$ ſubſtitutus exhibet $x \infty \frac{1}{3} + \frac{8}{27}x$, hoc eſt, $x \infty \frac{9}{19}$: unde porrò invenitur y $(\frac{2}{3}x)$ $\infty \frac{6}{19}$; & z $(\frac{2}{3}y)$ $\infty \frac{4}{19}$; ac propterea ratio ſortium x, y & z, ut 9. 6. 4.

2. *Methodo noſtrâ.* Poſito generaliter calculorum omnium numero a, alborum b, nigrorum c, concipiantur, ut jam ſæpiùs factum, infiniti colluſores, qui præſcriptâ conditione ludant, unusque poſt alterum calculum educat & reponat; erunt rurſus per Cor. 1. Reg. ad Prop. XII. exhibitæ propter invariatum manentem in omnibus electionibus alborum & nigrorum numerum, expectationes ſingulorum colluſorum ſequentes:

Coll.

Coll. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	&c.
A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	
Exp. $\frac{b}{a}$	$\frac{bc}{aa}$	$\frac{bcc}{a^3}$	$\frac{bc^3}{a^4}$	$\frac{bc^4}{a^5}$	$\frac{bc^5}{a^6}$	$\frac{bc^6}{a^7}$	$\frac{bc^7}{a^8}$	$\frac{bc^8}{a^9}$	$\frac{bc^9}{a^{10}}$	$\frac{bc^{10}}{a^{11}}$	$\frac{bc^{11}}{a^{12}}$	$\frac{bc^{12}}{a^{13}}$	$\frac{bc^{13}}{a^{14}}$	$\frac{bc^{14}}{a^{15}}$	&c.

unde cùm per hypoth. prima, 4ta, 7ma, 10ma &c. electiones ſint penès A; 2da, 5ta, 8va, 11ma &c. penès B; 3^{tia}, 6ta, 9na, 12ma &c. penès C; additis colluſorum his locis reſpondentium expectationibus in unam ſummam, habetur expectatio unius

$$\left.\begin{array}{l} A \propto \frac{b}{a}+\frac{bc^3}{a^4}+\frac{bc^6}{a^7}+\frac{bc^9}{a^{10}}+\frac{bc^{12}}{a^{13}}+\text{\&c.} \\ B \propto \frac{bc}{aa}+\frac{bc^4}{a^5}+\frac{bc^7}{a^8}+\frac{bc^{10}}{a^{11}}+\frac{bc^{13}}{a^{14}}+\text{\&c.} \\ C \propto \frac{bcc}{a^3}+\frac{bc^5}{a^6}+\frac{bc^8}{a^9}+\frac{bc^{11}}{a^{12}}+\frac{bc^{14}}{a^{15}}+\text{\&c.} \end{array}\right\} \text{ob progr. geom.} \left\{\begin{array}{l} \propto \frac{aab}{a^3-c^3}, \\ \propto \frac{abc}{a^3-c^3}, \\ \propto \frac{bcc}{a^3-c^3}, \end{array}\right.$$

adeoque ratio ſortium, ut $aa.\ ac.\ cc$, id eſt, hîc (ob $a.\ c :: 12.\ 8 :: 3.\ 2$) ut 9. 6. 4 ut anteà. Nota, ſi quæſtio proponeretur in colluſoribus quatuor, ſortes eorum eodem pacto repertum iri ſe habere, ut $a^3.\ aac.\ acc.\ c^3$; & ſi generaliter in colluſoribus n, ut $a^{n-1}.\ a^{n-2}c.\ a^{n-3}cc.$ &c. pergendo ſemper in ratione continuâ a ad c.

II. Si porrò ſenſus Problematis ſit, ut aſſumpti in commune calculi 12 non reponantur, poſtquàm ex urnâ exempti fuerint; obſervandum eſt, quòd per continuam eductionem calculorum nigrorum, primus quidem colluſor tranſeat in locum tertii, tertius in locum 2^{di}, ſecundus in locum primi, non idcircò tamen pariter ſortes, quas ab initio ludi habuêre, invicem permutent, ut factum fuit in præc. hyp. ſed quod ſubinde alias novas & à prioribus diverſas ob mutatum calculorum numerum acquirant, easque tamen ſimpliciores quò plures calculi nigri educti fuerint, atque ita comparatas, ut tandem deſinant in ſortes omnino cognitas. Quapropter incipiendo conſuetâ Auctoris methodo ab omnium ſimpliciſſimis, & pergendo retrò per omnes intermedias, perveniemus ultimò ſolâ ſyntheſi utendo ad caſum in quæſtione propoſitum.

Hunc in finem ſupponamus, eductos jam eſſe 7 calculos nigros, adeoque proximum eligendi locum ipſi B deberi. Sic pri-

 mus

mus A nihil ampliùs expectabit; quandoquidem reliquorum alteruter B vel C ob reſiduum nigrum unicum neceſſariò album educet & vincet. Secundus verò B ob 4 albos 4 habebit caſus ad vincendum, unumque ob reſiduum nigrum ad perdendum; quandoquidem ſi hunc eduxerit, tertius C infallibiliter vincet. Sed ob eandem rationem tertius C 4 habebit caſus ad perdendum & unum ad vincendum. Unde colligimus, ſortes trium A, B, C, eo caſu fore o, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{5}$.

Supponamus deinde, eductos eſſe nigros ſex. Sic habebunt, primus quidem A, quem proximus tunc ludendi ordo tangit, 4 caſus ad vincendum, totidemque ad perdendum duo reliqui: omnes verò tres ob reſiduos duos nigros duos caſus ad obtinendum præcedentes ſuas expectationes, quandoquidem altero horum educto unicus reſtat niger, ordoque ludendi ipſum B poſcit, qui caſus eſt præced. hypotheſis. Unde ſortes ipſorum nunc ſunt $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{15}$.

Fingamus porrò, eductos eſſe nigros quinque. Sic habebit tertius C, quem tangerent eligendi vices, ad vincendum; reliquique duo ad perdendum 4 caſus: ob reſiduos autem tres nigros, quivis illorum etiam 3 habet caſus ad expectationem ſuam modò inventam. Unde jam ſortes ipſorum fiunt, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{35}$, $\frac{3}{5}$.

Rurſus ſi educti concipiantur nigri quatuor, ſic ut æqualis alborum & nigrorum numerus ſuperſit, erit una medietas caſuum pro B, utpote penès quem tunc proxima foret electio, eademque contra A & C; altera verò medietas omnes tres ad præcedentes expectationes promovebit. Unde naſcuntur ſortes $\frac{1}{7}$, $\frac{19}{70}$, $\frac{3}{10}$.

Eâdem ratione ſi educti ſint nigri tres, inveniuntur ſortes $\frac{11}{21}$, $\frac{13}{42}$, $\frac{1}{6}$.

Si nigri duo, $\frac{11}{35}$, $\frac{13}{70}$, $\frac{1}{2}$. Si niger unus, $\frac{1}{5}$, $\frac{53}{110}$, $\frac{7}{22}$.

Si denique nullus adhuc calculus eductus fuerit, quem ſolum caſum primò intendimus, & propter quem præcedentes omnes expedire priùs oportuit, ſortes colluſorum A, B, C, ſimili modo reperiuntur $\frac{7}{15}$, $\frac{53}{165}$, $\frac{7}{33}$, ſive ad idem nomen reductæ $\frac{77}{165}$, $\frac{53}{165}$, $\frac{35}{165}$; ſic ut optata ratio ſortium ſit, ut 77, 53, 35.

Methodus porrò nobis familiaris etiam in præſente hypotheſi

locum

locum habet; neque enim hanc magis reſpuunt eæ quæſtiones, quæ communiter ſolâ ſyntheſi ſolvuntur, quàm quæ analyſi opus habent. Quoniam octo ſunt calculi nigri non reponendi, poſtquam educti fuerint, fingo novem eſſe colluſores, qui ſinguli ordine ſingulas electiones inſtituant; quo fiet ut unus eorum neceſſariò tandem album educat ac vincat. Nullus autem ſpem vincendi habere poteſt, niſi omnes ipſum præcedentes continuò nigros eduxerint; quocircà ſuppono horum numerum (cui caſuum numerus proportionatur) gradatim minui, atque poſt primam electionem ſupereſſe calculos nigros ſeptem, poſt 2^{dam} ſex, poſt 3^{tiam} quinque, & ſic deinceps; indeque ſingulorum colluſorum ſortes per Regulam Prop. XII. annexam elicio, juxta ſequentem laterculum:

Colluſ.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
	A	B	C	A	B	C
Num.omn.cal. a	12	11	10	9	8	7
albor. b	4	4	4	4	4	4
nigr. c	8	7	6	5	4	3
Expectat.	$\frac{4}{12}$.	$\frac{4.8}{11.12}$.	$\frac{4.7.8}{10.11.12}$.	$\frac{4.6.7.8}{9.10\ldots12}$.	$\frac{4.5.6\ldots8}{8.9.10\ldots12}$.	$\frac{4.4.5\ldots8}{7.8.9\ldots12}$.

Colluſ.	VII.	VIII.	IX.
	A	B	C
Num.calc.omn. a	6	5	4
albor. b	4	4	4
nigr. c	2	1	0
Expect.	$\frac{4.3.4\ldots8}{6.7.8\ldots12}$.	$\frac{4.2.3\ldots8}{5.6.7\ldots12}$.	$\frac{4.1.2\ldots8}{4.5.6\ldots12}$.

tum, quia prima, 4ta & 7ma electiones debentur ipſi A; 2da, 5ta & 8va ipſi B; 3^{tia}, 6ta & 9na ipſi C; expectationes colluſorum his numeris deſignatorum collectivè accipio, & habebo pro expectatione ipſius A, $\frac{4}{12}+\frac{4.6.7.8}{9.10.11.12}+\frac{4.3.4.5.6.7.8}{6.7.8.9.10.11.12}$; B, $\frac{4.8}{11.12}+\frac{4.5.6.7.8}{8.9.10.11.12}+\frac{4.2.3.4.5.6.7.8}{5.6.7.8.9.10.11.12}$; C, $\frac{4.7.8}{10.11.12}+\frac{4.4.5.6.7.8}{7.8.9.10.11.12}+\frac{4.1.2.3.4.5.6.7.8}{4.5.6.7.8.9.10.11.12}$; quæ fractiones omnes ad nomen commu-

ne 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12, reductæ numeratores nanciſcuntur ſequentes: 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11 + 4. 5. 6. 7. 8. 6. 7. 8 + 4. 5. 3. 4. 5. 6. 7. 8 ꝏ 4. 5. 6. 7. 8 in 3. 4. 5 + 6. 7. 8 + 9. 10. 11, 4. 5. 6. 7. 8. 8. 9. 10 + 4. 5. 6. 7. 8. 5. 6. 7 + 4. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 ꝏ 4. 5. 6. 7. 8 in 2. 3. 4 + 5. 6. 7 + 8. 9. 10, 4. 5. 6. 7. 8. 9. 7. 8 + 4. 5. 6. 4. 5. 6. 7. 8 + 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 ꝏ 4. 5. 6. 7. 8 in 1. 2. 3 + 4. 5. 6 + 7. 8. 9, unde eliſo communi factore 4. 5. 6. 7. 8, ratio ſortium exurgit, ut 3. 4. 5 + 6. 7. 8 + 9. 10. 11, 2. 3. 4 + 5. 6. 7 + 8. 9. 10, 1. 2. 3 + 4. 5. 6 + 7. 8. 9, ſeu divid. per 6, ut 10 + 56 + 165 ꝏ 231, 4 + 35 + 120 ꝏ 159, 1 + 20 + 84 ꝏ 105, rurſusque divid. per 3, ut 77, 53, 35, uti ſuprà. Et quia in numeris iſtis certam progreſſionis legem obſervamus, facile poſſemus regulam dare generalem pro numero colluſorum & calculorum quocunque, ſi tanti referret his immorari.

III. Tertio ſenſu acceptum Problema (cùm ſinguli trium colluſorum aſſumunt 12 calculos, aliusque poſt alium è ſuis unum depromit & non recondit) parùm differt à præcedente hypotheſi, niſi quòd ob auctum calculorum numerum multò prolixiorem operam depoſcit.

Supponamus primò, ipſis A & B nullum ampliùs ſupereſſe calculum nigrum, ipſi C verò adhuc unum, quem propterea eligendi vices tangent. Is propter 4 calculos albos & 1 nigrum, 4 habet caſus ad vincendum & unum ad perdendum; quandoquidem ſi hunc eduxerit, ipſe A cui non niſi albi ſuperſunt infallibiliter vincet: ſed & ob eandem rationem primus A viciſſim 4 habet caſus ad perdendum & unicum ad vincendum; ſecundo verò B nihil omninò relinquitur, eò quòd alterutri reliquorum neceſſariò cedet victoria. Unde colligitur, ſortes ipſorum A, B, C, fore $\frac{1}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$.

Supponamus deinde, ipſi A reſtare nullum, & ſingulis reliquorum unum nigrum. Sic ipſe B, quem eligendi ordo tangit, 4 ad vincendum caſus habet, totidemque ad perdendum reliqui;

unus

unus verò caſus eſt, qui unicuique illorum præcedentis caſus expectationem affert; id quod ipſis A, B, C, ſortem parit $\frac{1}{25}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{25}$.

Supponamus tertiò, ſingulis A, B & C, reſtare unum calculum nigrum. Sic A quem penès proxima electio eſt; 4 habebit ad vincendum, reliquique ad perdendum caſus; unum verò, quo perducuntur omnes tres ad præcedentes ſuas expectationes. Unde naſcuntur ipſis ſortes $\frac{101}{125}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{4}{125}$; quas inter ratio eſt, ut 101, 20, 4.

Eodem modo ulteriùs inveſtigandum eſſet, quid deberetur colluſoribus A, B & C, cùm ipſis reſtant calculi nigri, 1.1.2, 1.2.2, 2.2.2, 2.2.3, 2.3.3, 3.3.3, &c. quouſque perveniretur ad caſum propoſitum, qui ſingulis colluſoribus 8 nigros calculos attribuit. Sed quia hæc ſigillatim perſequi ſupra modum tædioſum foret, idcircò oſtendam, quo pacto quæſitum per ſaltum obtineri queat, inveniendo ſolummodò ſortes illorum ſtatuum, in quibus unicuique colluſorum æqualis nigrorum calculorum numerus ſupereſt; quem numerum ſemper vocemus c, ſicuti alborum b, & omnium $a \propto b+c$.

Oportet primò conſiderare omnes variationes, quæ accidere poſſunt cùm unusquisque colluſorum unum calculum è ſuis depromit; perſpicuum autem eſt fieri poſſe, ut vel omnes tres educant album calculum, vel duo tantùm, vel unus, vel nullus. Deinde attendendum, quot caſus ſingulis harum variationum reſpondeant; quorum quidem numerus hoc modo initur: Si quis certaret fore, ut omnes tres educant album, ejus ſors foret $\frac{b^3}{a^3}$: ſi futurum contenderet, ut duo A & B, vel duo A & C, vel B & C, album eligant & tertius nigrum, ſortem haberet $\frac{bbc}{a^3}$: ſi propugnaret fore, ut ſolus A vel B vel C album eximat, reliqui nigrum, ſortem poſſideret $\frac{bcc}{a^3}$: ſi denique nulli album concedere vellet, ſortem obtineret $\frac{c^3}{a^3}$, (quæ omnia ex Cor. 1. Regulæ Prop. XII. ſubjunctæ patefiunt, cùm tantundem hæc valeant, acſi ipſe in æquali numero caſuum tribus jactibus quippiam præcisè ter, aut bis, aut ſemel,

præ-

præſtandum aut planè non præſtandum ſuſciperet:) quamobrem, per ea quæ ad lit. L Prop. XI. annotavimus, rejecto fractionum harum communi denominatore ſignificabunt numeratores numeros caſuum, quibus unusquisque horum eventuum contingere poteſt.

Tertiò denique obſervandum, quòd juxta tenorem Problematis primus A victoriâ potiri debeat, quotiescunque ſive ſolus ſive cum alterutro reliquorum ſive cum utroque album calculum elegerit; ſecundus autem B, ſive ſolus ſive junctim cum C id præſtiterit; & tertius C, non niſi cum ſolus id effecerit: quotiescunque verò evenerit, ut nullus trium album educat, quòd tunc ſinguli perveniant ad ſortes, quas habere inventi ſunt, cùm nigri uno pauciores ipſis ſupereſſe ponebantur. Quapropter additis in unum caſibus, qui cuique tum favent tum adverſantur, invenimus primum A habere $b^3 + 2bbc + bcc$ caſus ad vincendum ſeu obtinendum depoſitum 1, & $bbc + 2bcc$ caſus ad perdendum; ſecundum B $bbc + bcc$ ad vincendum & $b^3 + 2bbc + 2bcc$ ad perdendum; & tertium C bcc ad vincendum & $b^3 + 3bbc + 2bcc$ ad perdendum: omnes verò tres habere c^3 caſus, qui ipſos ad ſortes jam anteà inveſtigatas perducunt; quæ ſortes ſi dicantur $\frac{p}{p+s+t}$. $\frac{s}{p+s+t}$. $\frac{t}{p+s+t}$; fiet per Prop. III. expectatio ipſius

$$A \infty \frac{\overline{b^3 + 2bbc + bcc} \text{ in } 1 + \overline{bbc + 2bcc} \text{ in } 0 + c^3 \text{ in } p : \overline{p+s+t}}{a^3}.$$

$$B \infty \frac{\overline{bbc + bcc} \text{ in } 1 + \overline{b^3 + 2bbc + 2bcc} \text{ in } 0 + c^3 \text{ in } s : \overline{p+s+t}}{a^3}.$$

$$C \infty \frac{bcc \text{ in } 1 + \overline{b^3 + 3bbc + 2bcc} \text{ in } 0 + c^3 \text{ in } t : \overline{p+s+t}}{a^3}.$$

hoc eſt, eliſo communi nomine & factâ multiplicatione per $\frac{p+s+t}{c^3}$, erit ratio ſortium ipſorum A, B, C, ut

$$\left.\begin{matrix} \overline{b^3 + 2bbc + bcc} \\ \overline{bbc + bcc} \\ bcc \end{matrix}\right\} \text{ in } \frac{\overline{p+s+t}}{c^3} \left\{\begin{matrix} +p. \\ +s. \\ +t. \end{matrix}\right.$$

Quibus

Quibus ita præmiſſis, ut ad ſolutionem noſtri Problematis revertamur, ſupponendum porrò eſt, ſingulis colluſorum reſtare duos calculos nigros: Sic lit. *b* & *c* valebunt 4 & 2 (pro quibus ſubſtitui poſſunt minimi in eâdem ratione termini 2 & 1); & quia ratio ſortium in caſu præcedenti cùm ſingulis unus reſtabat calculus niger, quam literis *p*, *s*, *t* indigitamus, expreſſa fuit per numeros 101, 20, 4, quorum ſumma $p+s+t \infty 125$; hinc juxta præmiſſam formulam expeditè inveniuntur numeri 2351, 770, 254, exprimentes rationem ſortium, quas colluſores in caſu præſenti poſſident.

Eodem pacto, ſi ſingulis tres nigri ſupereſſe ſupponuntur; quo caſu lit. *b* & *c* valent 4 & 3, ipſæque *p*, *s*, *t* numeros modò inventos 2351, 770, 254; ratio ſortium reperitur deſignari per numeros 26851, 11270, 4754.

Si reſidui ſint ſingulis 4 nigri, ſic ut valor lit. *b* & *c* ſit 4 & 4 (hoc eſt, in minimis terminis 1 & 1) inveniuntur ſortes ſe habere in ratione 198351, 97020, 47629.

Si reſtent ſingulis nigri 5, hoc eſt, ſi lit. *b* & *c* valeant 4 & 5, habetur ratio ſortium in numeris 1087407, 590940, 322029; ſeu dividendo per 9, in 120823, 65660, 35781.

Si ſingulis ſuperſint nigri 6, adeoque valor lit. *b* & *c* ſit 4 & 6, ſeu 2 & 3; exprimetur ratio ſortium per 5324223, 3126620, 1839557.

Si ſingulis adhuc remaneant nigri 7, ſic ut lit. *b* & *c* ſignificent 4 & 7, prodibit ratio ſortium in numeris 19844223, 12366620, 7719557.

Si denique nullo adhuc calculo educto omnes 8 nigri ſingulis ſuperſint, literæque *b* & *c* valeant 4 & 8, hoc eſt, 1 & 2, qui quidem caſus is eſt, quem nobis enodandum propoſuimus; & cujus gratiâ præcedentes omnes expedire priùs neceſſum habuimus, invenimus, quòd optata ratio ſortium colluſorum A, B, C, deſignetur per numeros 6476548, 4231370, 2768457.

Applicationem methodi nobis uſitatæ ad hanc hypotheſin Lector ipſe ſi vult inſtituet. Nos illam brevitatis gratiâ prætermittimus.

PROBLEMA III.

A Certat cum B quòd ipſe ex 40 chartis luſoriis, id eſt, 10 cujusque ſpeciei, 4 chartas extractu- rus ſit; ita ut ex unaquaque ſpecie habeat unam. Et invenitur ratio ſortis A ad ſortem B ut 1000 ad 8139.

Solutio: Pone primò, jam tres diverſarum ſpecierum chartas extractas eſſe; quo facto ex unaquâque harum ſpecierum adhuc remanebunt 9, hoc eſt, ex omnibus tribus ſpeciebus 27 folia, & ex quartâ ſpecie 10. Unde conſtat, quòd quartum folium extracturus habeat 27 caſus ad perdendum, & 10 ad vincendum; id quod ipſi valet $\frac{10}{37}$ depoſiti.

Pone deinde, duas differentium ſpecierum chartas extractas eſſe; quâ ratione ex iisdem ſpeciebus adhuc reſtant folia 18, ſicut ex reliquis duabus folia 20. Quapropter tertium folium exempturus 18 caſus habet ad perdendum, & 20 ad obtinendum tres chartas diverſarum ſpecierum, hoc eſt, ad obtinendum præcedentem expectationem $\frac{10}{37}$; id quod ei ſortem parit $\frac{100}{703}$.

Pone tertiò, extractam eſſe unam chartam; ſic ex eâdem hâc ſpecie, cujus eſt extracta, ſuperſunt chartæ 9, ex reliquis verò tribus ſpeciebus chartæ 30. Idcircò ſecundum folium accepturus 9 habet caſus ad perdendum, & 30 ad acquirendum diverſæ ſpeciei folium, hoc eſt, ad impetrandam ſortem modò inventam $\frac{100}{703}$; id quod tantundem eſt ac ſi haberet $\frac{1000}{9139}$.

Si nulla adhuc charta extracta ſit, ſors extrahentis eadem eſt cum præcedente, manetque $\frac{1000}{9139}$; quoniam omnes 40 caſus ipſum neceſſariò in eum ſtatum conjiciunt, qui in paragrapho præced. ſuppoſitus fuit. Quare tum etiam ſors contracertantis erit $\frac{8139}{9139}$; & ratio ſortium, ut 1000 ad 8139, quemadmodùm habet Auctor.

Ejusdem Problematis ſolutio etiam aliter per Combinationum doctrinam confici poteſt, uti parte tertiâ poſt hujus doctrinæ explicationem oſtendemus.

PRO-

PROBLEMA IV.

ASſumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus ſit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B.

Etiam iſtud Problema in tertiam libri partem rejicere cogimur, quoniam ad ejus ſolutionem artis combinatoriæ notitia prærequiri videtur.

PROBLEMA V.

A & B aſſumentes ſinguli 12 nummos ludunt tribus teſſeris hâc conditione: ut, ſi 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipſi B; at ſi 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipſi A; & ut ille ludum victurus ſit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B, ut 244140625 ad 282429536481.

Solutio: Conſiderandum primò, in tribus teſſeris contineri 216 jactus diverſos, & inter hos dari 15 jactus punctorum quatuordecim, & 27 jactus punctorum undecim; adeoque 15 caſus eſſe in quolibet jactu, quibus efficitur ut aleator A à colluſore B nummum accipiat, & 27 caſus quibus contingit ut hic ab illo nummum conſequatur; alios verò 174 caſus, quibus uterque eundem nummorum numerum priſtinamque proin ſortem retinet.

Deinde attendendum, quòd illi 174 caſus irriti, quibus colluſorum ſortes invariatæ manent, per 4 Coroll. 3. diſſimulari poſſint ac ſi prorsùs abeſſent, inque teſſeris tribus ſolummodò 42 reperirentur jactus, quorum 15 ipſum A nummo potiri faciant, & 27 ipſum B.

Tertiò & illud conſiderandum, quòd pro numeris caſuum 42, 15 & 27, utpote compoſitis inter ſe ſubſtitui poſſint per 2

 Cor.

Cor. 3, minimi in eâdem ratione termini 14, 5 & 9; in quorum tamen rurſus locum, ut generalior fiat ſolutio, nos literas a, b & c ſurrogamus.

Quibus animadverſis in enodatione propoſitæ quæſtionis ita deinceps progredior, ut inquiram ordine, quænam futuræ fuiſſent colluſorum ſortes, ſi ſinguli aſſumpſiſſent nummum unum, deinde ſi duos, poſteà ſi tres, quatuor &c. quouſque per inductionem pateat, quænam iis ſortes nunc competant, ubi ſinguli aſſumſerunt nummos 12.

Si ſinguli aſſumant nummum unum, perſpicuum eſt, ſortes eorum fore in ratione ipſorum numerorum b & c.

Si ſinguli accipiant nummos duos, primus jactus efficiet, ut colluſor A vel 3 poſſideat nummos, vel ut unus tantùm ei ſuperſit. Si tres poſſidet, habet b caſus ad acquirendum omnes quatuor, hoc eſt, ad vincendum ſeu obtinendum depoſitum 1; & c caſus, quibus ei relinquuntur nummi duo, hoc eſt, quibus revertitur ad ſortem initiò poſitam, quam vocare lubet z; quod proin valet $\frac{b+cz}{a}$. Si unicus illi nummus ſupereſt, habet b caſus ad recuperandum duos, hoc eſt, ſortem z; & c caſus ad perdendum ludum; id quod efficit $\frac{bz}{a}$. Atqui ut poſt primum jactum tres nummos numeret, rurſus b ſunt caſus; c verò caſus quibus ipſi unus tantùm relinquitur. Itaque ab initio b caſus extant qui ei dent $\frac{b+cz}{a}$, & c qui dent $\frac{bz}{a}$; id quod ſortem gignit $\frac{bb+2bcz}{aa}$: quare $z \infty \frac{bb+2bcz}{aa}$, ſive $z \infty \frac{bb}{aa-2bc} \infty \frac{bb}{bb+cc}$, & relinquitur colluſori B $\frac{cc}{bb+cc}$; adeò ut ſortes ipſorum ſint in ratione bb ad cc.

Si ſinguli aſſumant nummos tres, primo jactu continget, ut colluſor A vel 4 nummorum compotem ſe videat, vel ut duorum tantùm; in quibus ſtatibus expectationes ejus appellentur x & y. Si quatuor nummorum compos eſt, ulteriùs vel ipſe primus ab altero duos nummos impetrabit ac vincet, vel ab ipſo duos conſe-

quetur

quetur alteri, ſic ut ei relinquantur adhuc nummi duo: ſed ut ipſe primus duos proximos nummos conſequatur, bb caſus præſtò ſunt, & cc caſus quibus idem alteri obtingit (uti ex eo quod modò oſtenſum eſt collato cum annot. Propoſ. XI. ad lit. I colligitur) quapropter bb caſus habet ad 1, & cc caſus ad ſortem y, quod ei valet $\frac{bb+ccy}{bb+cc}$; cumque id ipſum etiam appellemus x, erit $x \infty \frac{bb+ccy}{bb+cc}$, ſeu $y \infty \frac{bbx+ccx-bb}{cc}$. Similiter cùm duo tantum ipſi reſtant nummi, bb caſus habet ad recuperandum adhuc duos alios, hoc eſt, ad impetrandam ſortem x, & cc caſus ad perdendum ſuos & cum iis omne depoſitum; quod tantundem eſt ac ſi haberet $\frac{bbx}{bb+cc}$; cumque tum etiam habere ſupponatur y, fiet $y \infty \frac{bbx}{bb+cc}$; ſed ſuprà inventa quoque $y \infty \frac{bbx+ccx-bb}{cc}$; quare $\frac{bbx+ccx-bb}{cc} \infty \frac{bbx}{bb+cc}$; atque hinc $x \infty \frac{b^4+bbcc}{b^4+bbcc+c^4}$; nec non y $(\infty \frac{bbx}{bb+cc})$ $\infty \frac{b^4}{b^4+bbcc+c^4}$. Quo facto demùm accedendum ad ſtatum initiò poſitum, cogitandumque quòd ubi ſinguli tres nummos aſſumunt, b caſibus contingere poſſit, ut colluſor A poſt primum jactum 4 nummos poſſideat, hoc eſt, ut ſortem x ſeu $\frac{b^4+bbcc}{b^4+bbcc+c^4}$ acquirat; & c caſibus, ut duos reſiduos habeat nummos, id eſt, ut ſortem y ſive $\frac{b^4}{b^4+bbcc+c^4}$ conſequatur. Unde tunc ejus expectatio fiet $\frac{b^5+b^4c+b^3cc}{b^5+b^4c+b^3cc+bbc^3+bc^4+c^5} \infty$ (inſtitutâ per $bb+bc+cc$ diviſione) $\frac{b^3}{b^3+c^3}$, & relinquetur colluſori B $\frac{c^3}{b^3+c^3}$; ſic ut ſortes eorum nunc ſint in ratione b^3 ad c^3.

Quandoquidem igitur ſortes colluſorum A & B inveniuntur ſe habere in ratione ſimplici numerorum b & c, cùm à ſingulis unus nummus aſſumitur; & in ratione duplicatâ horum numerorum, cùm à ſingulis aſſumuntur duo; & in triplicatâ, cùm tres: factâ inductione colligimus, quòd acceptis etiam quotlibet nummis ſortes iſtæ perpetuò futuræ ſint in ratione toties multiplicatâ numerorum b & c, quot nummi à ſingulis fuerint aſſumpti; & quòd

per conſequens in propoſito Auctoris exemplo, ubi ab unoquoque 12 aſſumpti ſupponuntur, ſortes hæ ſe habeant, ut b^{12} & c^{12}, hoc eſt, reſtituendo 5 & 9, pro *b* & *c*, ut 244140625 & 282429536481; quemadmodùm habet Auctor. Quod ipſum etiam vel absque calculo utcunque ſic inferri poteſt: A habens omnes nummos præter unum habet *b* caſus ad vincendum, & B habens omnes præter unum, habet *c* caſus ad vincendum; dein A habens omnes nummos præter duos habet *b* caſus ad obtinendum omnes præter unum, id eſt, ad *b* caſus præcedentes, ideoque *b* vicibus *b* caſus ſeu *bb* caſus habet ad vincendum; & B habens omnes præter duos ob ſimilem rationem habet *cc* caſus ad vincendum: atque ita pro ſingulis nummis qui colluſoribus ad vincendum deſunt, præſtò ſunt ipſi A *b*, & ipſi B *c* caſus, quibus ipſis acceſſus fit ad caſus præcedentes; quare cùm ab initio ludi uterque habeat nummos 12, & proinde utrique totidem ad vincendum deficiant, numeri *b* & *c* duodecies poſiti ac in ſe ducti exhibebunt rationem ſortium, ut anteà.

Quòd ſi quis tamen ratiocinium iſtud non ſat evidentiæ habere exiſtimet, neque etiam inductioni ſatis fidat, is deinceps ſimili compendio, quo Auctor in Propoſ. XI. uſus fuit, progredi poterit, nempe transeundo ſtatim ad nummos ſex, & hinc ad duodecim, omiſſis omnibus intermediis caſibus. Quanquam ne ſic quidem ulteriori calculo indigemus; idem enim qui ſupra ſubductus habetur in hypotheſi duorum aſſumtorum nummorum, etiam valet, ſi loco unius nummi quotlibet *n* nummos, & loco duorum $2n$ nummos aſſumtos intelligamus, dummodò pro numeris caſuum *b* & *c* quibus alterutri colluſorum unus nummus acquiritur vel deperditur ſubſtituamus quoque numeros caſuum, quibus ille *n* nummos acquirere vel amittere poteſt; adeò ut hinc legitimè inferamus, rationem ſortium quas habent colluſores cùm ſinguli $2n$ nummos aſſumunt perpetuò duplicatam eſſe debere ejus quæ obtinet cùm ſingulis tantùm *n* nummi aſſumpti ſunt. Quare cùm ſuprà in caſu trium aſſumtorum nummorum ratio ſortium reperta ſit ut b^3 ad c^3, erit illa in caſu nummorum 6 ut b^6 ad c^6, indeque porrò in caſu nummorum 12 ut b^{12} ad c^{12}, quemadmodum inductione collegeramus.

Et

Et ſic quidem liquet de ſortibus colluſorum, cùm ambo æquè multos nummos acceperunt; ſed nondum conſtat de ſortibus quas acquirunt in quolibet ſtatu, in quem ludum proſequendo pervenire poſſunt, quando uni plures, alii pauciores nummi contigêre. Interim etiam pro iſtis regula generalis datur; poſito namque m pro numero nummorum quos habet A, & n pro numero eorum quos habet B, reperio quòd ratio ſortis A ad ſortem B ſemper ſit futura, ſi b & c æquantur, ut m ad n; ſin c excedit b, ut $b^n c^m - b^{m+n}$ ad $c^{m+n} - b^n c^m$; quorum demonſtratio, cùm operoſiorem calculum depoſcat, Lectori enodanda relinquitur. Nos verò absque ulteriore morâ ad alteram propoſiti noſtri partem transimus.

ARTIS CONJECTANDI PARS SECUNDA,

continens

Doctrinam de Permutationibus & Combinationibus.

Proœmium.

INfinitam varietatem, quæ cùm in naturæ operibus, tùm in actionibus mortalium elucet, quæque præcipuam hujus Univerſi pulcritudinem conſtituit, non aliunde quàm ex diverſimodâ compoſitione, mixturâ & tranſpoſitione partium ejus inter ſe originem ducere palàm eſt. Sed quia multitudo rerum ad effectum aliquem producendum concurrentium ſæpenumerò tanta eſt tamque varia, ut difficillimum ſit recenſere vias omnes, quibus earundem compoſitio vel mixtura fieri vel non fieri poteſt, hinc fit ut nullum ſit vitium, in quod homines etiam maximè prudentes & circumſpecti frequentiùs incidant illo, quod Logici communiter appellant *inſufficientem enumerationem partium*; adeò quidem ut non verear

verear dicere, hanc unicam ferè ſcaturiginem eſſe infinitorum eorumque graviſſimorum errorum, quos in ratiociniis noſtris circa res tum cognoſcendas tum agendas quotidie committimus. Quare merito ſuo utiliſſima cenſenda eſt Ars, *Combinatoria* dicta, quæ huic mentis noſtræ defectui medetur, docetque ſic enumerare modos omnes poſſibiles, ſecundùm quos res plures permiſceri, transponi vel conjungi invicem poſſunt, ut certi ſimus, nos nullum eorum prætermiſiſſe, qui inſtituto noſtro conducere valent. Quanquam enim hoc negotii eatenùs ſit conſiderationis Mathematicæ, quatenùs in ſubducendo calculo terminatur; ſi tamen uſum & neceſſitatem ſpectes, univerſale prorſus eſt & ita comparatum, ut ſine illo nec ſapientia Philoſophi, nec Hiſtorici exactitudo, nec Medici dexteritas, aut Politici prudentia conſiſtere queat. Argumento ſit hoc unicum, quòd omnis horum labor in *conjectando*, & omnis conjectura in trutinandis cauſarum complexionibus aut combinationibus verſatur. Unde quoque nonnulli eximii Viri, ac nominatim Schootenius, Leibnitius, Walliſius, Preſtetus, materiam hanc ſibi tractandam ſumpſêre, ne quis exiſtimet nova eſſe hîc omnia quæ prolaturi ſumus; tametſi quædam non contemnenda de noſtro adjecimus, inprimis demonſtrationem generalem & facilem proprietatis numerorum figuratorum, cui cætera pleraque innituntur, & quam nemo quod ſciam ante nos dedit eruitve. Cùm itaque nondum plenum Artis ſyſtema habeamus, tum verò ne illa quæ habemus aliunde petere ſit opus, viſum eſt totam Doctrinam ab ovo ordiri ac ne quid indemonſtratum relinquatur ex primis fundamentis eruere; quod tamen breviter fiet &

ſuccinctè, nec niſi in quantum inſtituti noſtri ratio exigere videtur. Totam Tractationem ad duo ſumma capita referimus, quorum unum Permutationum, alterum Combinationum doctrinam perſequitur; cui accedit tertium, quod utrasque mixtim contemplatur.

CAPUT I.

De Permutationibus.

PErmutationes rerum voco Variationes, juxta quas ſervatâ eâdem rerum multitudine ordo ſitusque inter ipſas diverſimodè permutatur.

Itaque ſi quæratur, quoties nonnullæ res transponi vel permiſceri invicem poſſint, ſic ut ſemper accipiantur omnes ſolo ordine ſituve mutato, dicentur quæri omnes Permutationes rerum illarum.

Res autem permutandæ vel omnes poſſunt eſſe diverſæ, vel aliquot earum eædem; quæ quidem per totidem Alphabeti literas ſive diverſas ſive easdem commodè deſignabuntur.

I. *Si res omnes permutandæ ſunt diverſæ:*

CÙm numerus permutationum in rebus pluribus iniri nequeat, niſi idem priùs in omnibus aliis numero paucioribus compertus habeatur, liquet in hâc inquiſitione utendum viâ ſyntheticâ, h. e. ordiendum nobis eſſe ab hypotheſibus omnium primis & ſimpliciſſimis:

Unius rei vel literæ *a*, una tantùm ſumtio vel poſitio eſt.

Duarum rerum aut literarum *a* & *b*, vel *a* præcedit & *b* ſequitur, vel præcedente *b* ſequitur *a*; unde duo ipſarum fiunt ordines *ab* & *ba*.

Tres porrò literæ *a*, *b*, *c*, ita collocari poſſunt, ut primus locus vel ipſi *a* vel *b* vel *c* concedatur: ſi *a* primum tenet locum,

reliquæ

reliquæ duæ duobus, ut diximus, modis diſponi queunt: ſi *b* in primum locum transferatur, reliquarum duarum duplex itidem poterit eſſe poſitio; quod & intelligendum, ubi tertia *c* primam ſedem occupaverit. Unde trium literarum in univerſum ter duæ ſeu 6 exiſtunt permutationes *abc*, *acb*: *bac*, *bca*: *cab*, *cba*.

Similiter ſi 4 extent literæ *a*, *b*, *c*, *d*, earum unaquæque primum obtinere locum poteſt, interea dum tres reliquæ, ut nunc oſtenſum, ter bis ſeu ſexies ordinem variabunt: quare cùm earum, quæ primo loco poni poſſunt, ſint quatuor, ſequitur omnes quatuor quater ter bis, ſeu quater ſexies, hoc eſt, vicies quater ſitum inter ſe permutare poſſe.

Ob eandem rationem accedente 5tâ literâ *e* inſtitui poſſunt quinquies tot variationes, quot in caſu præcedenti, hoc eſt, quinquies 24, ſeu 120. Et generaliter, datis quotcunque literis, numerus permutationum, quas ſubire poſſunt omnes, toties excedit numerum permutationum, quas recipiunt literæ unâ pauciores, quot ſunt unitates in dato literarum numero. Unde ſponte manat ſequens

Regula

pro inveniendis omnibus permutationibus rerum quotcunque datarum.

OMnes numeri ab unitate ſe conſequentes naturali ordine ad datum uſque rerum numerum incluſivè ducantur in ſe invicem, productum manifeſtabit quæſitum.

Putà, ſi datus rerum numerus ſit *n*, numerus permutationum erit 1.2.3.4.5. &c. uſque ad *n*; vel etiam (quia unitas non multiplicat) 2.3.4.5.......*n*. Nota, punctula numeris interjecta hìc & ubique in ſimili materiâ continuum numerorum in ſe ductum ſignificant. Ex. gr. ſeptem rerum permutationes ſunt 2.3.4.5.6.7 ∞ 5040. Ratio patet ex dictis, operatio ex adjunctâ Tabellâ:

Numerus Rerum,	*Permutationum*,
1	1
	2
2	2
	3
3	6
	4
4	24
	5
5	120
	6
6	720
	7
7	5040
	8
8	40320
	9
9	362880
	10
10	3628800
	3628800
11	39916800
	79833600
12	479001600

2. *Si rerum permutandarum nonnullæ ſunt eædem:*

Quòd ſi literæ una pluresve recurrant ſæpiùs, hoc eſt, ſi in dato rerum numero aliquæ res ſimiles ſint ſive eædem; ut, ſi datæ ſint *aaabcd*, ubi litera *a* ter repetitur, numerus permutationum multo minor evadit: ad quem inveniendum cogitandum eſt, quòd, ſi omnes eſſent diverſæ, putà, ſi loco *aaa* ſcriberetur *aα*a, poſſent hæ tres literæ etiam nullâ cæterarum loco motâ inter ſe ſexies transponi, per præced. Regul. unde totidem diverſæ naſcerentur permutationes; at nunc cùm ſunt eædem, ſex iſtæ permutationes literarum *aα*a nullam univerſarum diſpoſitioni variationem inducunt, ac proinde pro unâ eâdemque habendæ ſunt: quod cùm de quâcunque diſpoſitione literarum pariter ſit intelligendum, indicium præbet, numerum permutationum rerum datarum ſexies, h. e. toties minorem eſſe numero permutationum, quas ſubire poſſent ſi omnes eſſent diverſæ, quoties inter ſe permutari queunt res ſimiles: ſed ſi omnes 6 literæ diverſæ exiſterent, permutari poſſent juxta præced. 720. vicibus. Ergo nunc ubi tres ipſarum conveniunt, permutari duntaxat poterunt vicibus 120.

Iterum ſi datæ ſint 6 literæ *aaabbc*, ubi præter literam *a* quæ ter recurrit, etiam litera *b* bis repetitur; manifeſtum eſt, numerum permutationum adhuc bis minorem evadere, quàm in præcedenti caſu fuerat, adeoque ſolùm ad 60 ſe extendere: quandoquidem binæ quælibet permu-

permutationes, quæ ex ſolâ transpoſitione duplici literarum *bb*, ſi diverſæ eſſent, naſcerentur, nunc coïncidunt. Eodem pacto colligendum, ſi plures literæ repeterentur ſæpiùs, pro ſingulis earum numerum permutationum minui toties, quoties ſeorſim inter ſe permutari poſſunt eædem literæ. Unde ratio habetur ſequentis Regulæ:

Regula

pro inveniendis rerum permutationibus, cùm earum nonnulla ſunt eadem:

NUmerus permutationum, quas admitterent datæ res ſi omnes differentes eſſent, dividatur per numerum permutationum, quas ſubire poteſt res ſimilis ſecundùm multitudinem ſuam, ſi una ſit quæ ſæpiùs repetatur: aut per productum ex numeris permutationum, quas ſeorſim recipere poſſunt ſingulæ res ſimiles ſecundùm multitudinem ſuam, ſi plures ſint quæ ſæpiùs recurrant; & quotiens exhibebit quæſitum.

Uſus Doctrinæ Permutationum inſignis eſt in definiendo numero Anagrammatum alicujus vocis: Ex. gr. Transpoſitiones omnes poſſibiles literarum in voce *Roma* ſunt $1.2.3.4 \infty 24$, ob 4 differentes literas, per 1 Reg. in voce *Leopoldus* $\frac{362880}{2.2 \infty 4} \infty 90720$: in voce *Studioſus* $\frac{362880}{2.6 \infty 12} \infty 30240$, ob 9 utrobique literas, interque illas ibi geminum *l* & geminum *o*, hîc geminum *u* & triplex *s*, per 2 Reg.

Huc pertinent verſus nonnulli ob variationum multitudinem *Protei* dicti, quos inter celebrantur Lanſii, Scaligeri, Bauhuſii. Thomæ Lanſio hoc diſtichon debemus:

Lex, *Rex*, *Grex*, *Res*, *Spes*, *Jus*, *Thus*, *Sal*, *Sol*, (bona) *Lux*, *Laus*:
Mars, *Mors*, *Sors*, *Lis*, *Vis*, *Styx*, *Pus*, *Nox*, *Fex*, (mala) *Crux*, *Fraus*.

 cujus

cujus ſinguli verſus per Reg. pr. ob 11 monoſyllaba (diſſyllabis vocibus *bona* & *mala* 5^{tæ} ſemper regioni affixis) ſalvâ metri lege variari poſſunt 39916800 vicibus. Et quanquam aliàs contingat, ut pleræque variationes in metri leges arietent, nec non ut pleriſque Anagrammatismi ſint non-ſignificantes & barbari; levi tamen plerunque induſtriâ opus eſt ad ſecernendum utiles ab inutilibus, illorumque numerum ſeorſim ineundum, ſi aliquem in iis inquirendis ordinem obſerves. Quemadmodùm cernere eſt in hexametro à Bernh. Bauhuſio Jeſuitâ Lovanienſi in laudem Virginis Deiparæ conſtructo:

Tot Tibi ſunt dotes, Virgo, quot ſidera cœlo;

quem dignum peculiari operâ duxerunt plures Viri celebres. Erycius Puteanus in libello, quem Thaumata Pietatis inſcripſit, variationes ejus utiles integris 48 paginis enumerat, easque numero ſtellarum, quarum vulgò 1022 recenſentur, accommodat, omiſſis ſcrupuloſiùs illis, quæ dicere videntur, tot ſidera cœlo eſſe, quot Mariæ dotes; nam Mariæ dotes eſſe multo plures. Eundem numerum 1022 ex Puteano repetit Gerh. Voſſius cap. 7. de Scient. Mathemat. Preſtetus Gallus in primâ editione Element. Mathemat. pag. 348. Proteo huic 2196 variationes attribuit, ſed factâ reviſione in alterâ edit. tom. pr. pag. 133. numerum earum dimidio fere auctum ad 3276 extendit. Induſtrii Actorum Lipſ. Collectores m. Jun. 1686, in recenſione Tractatûs Walliſiani de Algebrâ, numerum in quæſtione (quem Auctor ipſe definire non fuit auſus) ad 2580 determinant. Et ipſe poſtmodùm Walliſius in edit. latinâ operis ſui Oxon. anno 1693. impreſſâ pagin. 494, eundem ad 3096 profert. Sed omnes adhuc à vero deficientes, ut deluſam tot Virorum poſt adhibitas quoque ſecundas curas in re levi perſpicaciam meritò mireris. Facto enim examine deprehendo, fætum hunc Bauhuſianum excluſis etiam ſpondaïcis, admiſſis verò iis qui cæſurâ deſtituti ſunt, ſalvâ metri lege omnino ter millies tercenties ac duodecies variabilem eſſe. At prolixiùs de his agere tanti non intereſt, nec inſtitutum noſtrum patitur.

Typus

Typus Variationum Versûs Bauhuſiani:

Tot Tibi ſunt dotes, Virgo, quot ſidera cælo.

Quintam Regionem Hexametri occupat vel

Sidera, quam vocem excipit aut vox
- *Diſſyllaba una*, nempe vel
  - *Cœlo*, ac tum vox *Tibi* inter ſex reliquas occupat locum vel
    - *Secundum*, præcedente voce nunc
      - *Monoſyllabâ*, eâque vel
        - *Tot*, cui caſui reſpondent - - Variationes 24
        - *Sunt*, - - - - - - - 24
        - *Quot*, - - - - - - 24
      - *Diſſyllabâ Virgŏ*, - - - - - 24
    - *Tertium*, præeuntibus
      - *Unâ monoſyllabâ & una diſſyllabâ*, primas tenente vel
        - *Monoſyllabâ*, *Tot*, quam excipit alterutra
          - *Dotes*: 6, *Virgō*: 6 } - - - 12
          - *Sunt*, - - - - - 12
          - *Quot*, - - - - - 12
        - *Diſſyllabâ*, *Dotes*, quam ſequitur
          - *Tot*: 6, *Sunt*: 6, *Quot*: 6 } - - - 18
          - *Virgō*, - - - - - - 18
      - *Duabus diſſyllabis*, nempe, *Dotes Virgŏ*, - - - 6

a b c d

174

a b c d 174

Quartum, præcedentibus

Tribus monoſyllabis, - - - - 12

Duabus monoſyllabis cum diſſyllabâ Virgŏ, - 12

Unâ monoſyllabâ & duabus diſſyllabis, - 36

Quintum, præmiſſis

Tribus monoſyllabis cum unâ diſſyllabâ, - - 48

Duabus monoſyllabis cum totidem diſſyllabis, quarum poſterior *Virgŏ*, - - 18

Sextum, - - - - - 120

420 - - 420

Dotes, unde totidem variationes, quot in *Cælo*, nempe - - 420

Virgo, unde rurſus totidem, quot in *Cælo*, exceptis ſolùm illis 60 variationibus, ubi poſtrema ſyllaba in *Virgo* correpta eſt; quibus proin demtis ex 420 remanent - - - - - 360

Monoſyllaba dua, eæque

Quot ſunt, vel *Sunt quot*; voce *Tibi* occupante locum vel

Secundum, primo relicto voci

Monoſyllaba, *Tot*: - - - - 12

Diſſyllaba, *Virgo*: - - - - 12

Tertium, præcedentibus

Monoſyllabâ cum Diſſyllabâ, - - - 24

Duabus Diſſyllabis, quarum poſt. *Virgŏ*, - 8

Quartum, præeuntibus

Monoſyllabâ cum duabus Diſſyllabis, - - 36

Tribus Diſſyllabis, quarum ultima *Virgŏ*, - 4

Quintum, - - - - - 48

144 - - 144

Tot ſunt, vel, *Sunt tot*, totidem - - - - 144

Tot quot, aut, *Quot tot*, totidem - - - - 144

Tibi, &c.

1632

Tibi, quam vocem ſequitur vox 1632

Diſſyllaba una, eaque vel

Cœlo, voce *Sidera* occupante locum aut

Primum, - - - - - -	120	
Secundum, - - - - - -	48	
Tertium, præmiſſis vel		
Duabus Monoſyllabis, - - - -	36	
Duabus Diſſyllabis, - - - - -	12	
Quartum, præeuntibus Duabus Monoſ. & unâ Diſſ.	72	
Quintum, præc. duabus Monoſ. totidemq; Diſſyll.	72	
	360 . .	360
Dotes, totidem quot in *Cœlo* - - - -		360
Virgo, totidem - - - - - - -		360

Monoſyllaba dua, eæque

Quot ſunt, vel, *Sunt quot*: voce *Sidera* tenente locum

Primum: - - - - - - -	48	
Secundum, poſt Diſſyllabam vocem, - -	36	
Tertium, poſt duas Diſſyllabas, - -	24	
Quartum, poſt tres Diſſyllabas, - -	12	
	120 - -	120
Tot ſunt, vel, *Sunt tot*, totidem - - - -		120
Tot quot, vel, *Quot tot*, totidem - - - -		120

Monoſyllabâ unâ, (quo caſu ante *Tibi* ſemper habetur *Virgŏ*,) nempe vel

Sunt, voce *Sidera* locum poſſidente aut

Primum: - - - - - - -	24	
Secundum: - - - - - -	12	
Tertium, præced. *duabus Monoſyllabis*, - -	4	
- - *duabus Diſſyllabis*, - -	4	
Quartum, - - - - - -	12	
Quintum, - - - - - - -	24	
	80 . .	80
Tot, totidem quot in *Sunt*, - - - -		80
Quot, totidem - - - - - -		80

Summa omnium Variationum utilium 3312

Cap. II.

De Combinationibus, iisque primò conſideratis ſimpliciter.

Combinationes rerum ſunt Conjunctiones, juxta quas ex datâ rerum multitudine nonnullæ eximuntur, interque ſe conjunguntur nullo ordinis ſitusve ipſarum reſpectu habito.

Idcircò cùm quæritur, quoties ex dato rerum numero vel binæ, vel ternæ, vel quaternæ &c. accipi poſſint, ſic ut nunquam omnes eædem res ſumantur ſæpiùs quàm ſemel, dicentur quæri omnes Combinationes diverſæ rerum datarum.

Numerus, ſecundùm quem res datæ conjunguntur, dicitur *Exponens* Combinationis; ita ſi res binæ ſumuntur, Exponens erit 2; ſi ternæ, 3; ſi quaternæ, 4. Res verò ſecundùm hos exponentes junctæ dicuntur *Binarii*, *Ternarii*, *Quaternarii* &c. vel *Biniones*, *Terniones*, *Quaterniones* &c. & conſonanter etiam *Uniones* vel *Unitates* quando res ſumuntur ſingulæ, & *Nulliones* cùm nulla planè ſumitur.

Conjunctiones ipſas nonnulli vocant *Combinationes*, *Con3nationes*, *Con4nationes* &c. quas omnes vulgò unâ voce *Combinationum* complecti ſolent, tametſi hæc vox ſtrictiori ſignificatu propriè non niſi illas conjunctiones indigitare videatur, quibus res binæ invicem junguntur. Quamobrem alii generaliori voce *Complicationum* vel *Complexionum* uti malunt: alii magis appoſitè *Electiones* vocant, ut & illæ ſubintelligi poſſint rerum acceptiones, quibus res ſingulæ ſeorſim ſumuntur, aut quibus etiam nulla planè ſumitur.

Res autem inter ſe combinandæ vel omnes poſſunt eſſe diverſæ, vel aliquot ipſarum eædem; eæque vel ita combinari debent, ut in nullâ combinatione res eadem ſæpiùs contineatur, quàm ipſa reperitur in toto rerum numero: vel ſic, ut in eâdem combinatione res eadem etiam ſæpiùs recurrere, h. e. ut ſecum ipſâ quoque combinari poſſit. Iterumque quæri poteſt numerus combinationum

tionum vel ſecundùm omnes exponentes conjunctim, vel ſecundùm ſingulos ſeorſim. Atque inſuper circa unumquemque horum combinandi modorum plures formari poſſunt quæſtiones & problemata, è quibus illa tantùm delibabimus, quæ in ſequentibus alicui uſui fore judicamus.

1. *Si res omnes combinandæ ſunt diverſæ, inque nullâ combinatione eadem res bis occurrere debet, invenire omnes Combinationes ſimpliciter ſive ſecundùm omnes exponentes conjunctim:*

SUnto combinandæ modis omnibus literæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* &c. Fiant tot ſeries quot literæ, hoc modo: In primâ ſerie ponatur ſola litera *a*.

In ſecundâ ponatur *b*, nunc ſeorſim, nunc junctim cum *a*, ut habeatur *ab* vel *ba*. Eadem enim conjunctio eſt, quæ *b* cum *a*, & *a* cum *b* jungit, cùm ordo non attendi ſupponatur.

In tertiâ collocetur *c*, eaque primò ſola, dein juncta, partim cum *a* & *b*, ut fiant biniones *ac*, *bc*; partim cum ipſo binione *ab*, ut fiat ternio *abc*.

a.

b. ab.

c. ac. bc. abc.

d. ad. bd. cd. abd. acd. bcd. abcd.

e. ae. be. ce. de. abe. ace. bce. ade. bde. cde. abce. abde. acde. bcde. abcde.

In quartâ ponatur *d*, primò ſola, deinde juncta cum ſingulis præcedentium literarum *a*, *b*, *c*, ſingulisque earum tum binariis *ab*, *ac*, *bc*, tum ternario *abc*; ut fiant novi biniones *ad*, *bd*, *cd*, terniones *abd*, *acd*, *bcd*, & quaternio *abcd*.

Similiter quintæ ſeriei agmen ducat litera *e*, quam primò ingrediatur ſola, dein juncta cum omnibus præcedentium ſerierum electionibus. Eademque methodo procedendum, ſi plures eſſent

 datæ

datæ literæ. Quâ ratione ſatis manifeſtum eſt, datas literas in iſtis ſeriebus omnifariàm inter ſe junctas eſſe, nullamque earum fieri poſſe electionem, quæ non in unâ harum ſerierum reperiatur, ſed & nullam eſſe quæ alicubi bis occurrat; adeoque omnes unà ſeries ſuppeditaturas omnes electiones poſſibiles, quæ circa datas literas inſtitui queunt.

Harum igitur numerus initur facilè, ſi attendatur quòd in quâlibet ſemper ſerie una ampliùs inveniri debeat electio, quàm in antecedentibus omnibus ſeriebus ſimul; quoniam litera, quæ illius ſeriei caput eſt, ibidem ſemel ponitur ſola, & præterea unà aſſumit ſecum omnes electiones præcedentium ſerierum. Hinc enim ſequitur, quia in primâ ſerie eſt electio unica, fore in ſecundâ electiones duas, in tertiâ 4, in quartâ 8, & ſic deinceps in progreſſione geometricâ duplâ: quandoquidem progreſſionis duplæ ab unitate hanc quoque naturam eſſe conſtat, ut ſumma terminorum quotlibet unitate aucta ſequentem terminum exhibeat. Quocirca ſumma electionum in ſeriebus omnibus æqualis eſt ſummæ terminorum totidem progreſſionis duplæ ab unitate, hoc eſt, per modò memoratam proprietatem, ipſi termino ſubſequenti ejusdem progreſſionis unitate multato; qui quidem terminus ſubſequens idem eſt cum producto binarii toties poſiti & in ſe ducti, quot ipſum in progreſſione termini præcedunt, hoc eſt, quot ſunt ſeries, quarum electiones quæruntur. Unde talis exurgit

Regula

pro inveniendis omnibus electionibus rerum datarum ſecundùm omnes exponentes:

A producto binarii toties poſiti & multiplicati in ſe, quot ſunt datæ res, auferatur unitas, reliquum indicabit quæſitum.

Hoc eſt, poſito rerum datarum numero n, numerus omnium electionum ſimpliciter, putà, omnium unionum, binionum, ternionum &c. erit $2^n - 1$. Hinc ſi nullionem ſeu electionem, quâ ex rebus datis nulla ſumitur, quæque in quâvis rerum multitudine

una

una ſemper eſt & unica, ſimul comprehendas, fiet numerus ille 2^n: ſin cum nullione ipſos quoque uniones reſeces, quorum numerus ipſi rerum numero perpetuò æquatur, erit numerus binionum, ternionum, cæterarumque complexionum $2^n - n - 1$. Ex. gr. Septem Planetarum conjunctiones vel complicationes omnes diverſæ ſunt $2^7 - 1 \infty 2.2.2.2.2.2.2 - 1 \infty 128 - 1 \infty 127$; unde ſi demas electiones 7, quibus ſinguli Planetæ ſeorſim accipiuntur, quæque propriè non conjunctiones ſed disjunctiones Planetarum ſunt, relinquetur numerus omnium conjunctionum ſtrictè dictarum, quibus Planetæ vel bini vel terni &c. vel denique ſepteni junguntur, $2^7 - 7 - 1 \infty 120$. Sic etiam duodecim, uti vocant, Regiſtra ſeu fiſtularum ordines in organo pneumatico, quibus ſonus mox ſibilans mox tremebundus efficitur, aut aliter modificatur, variari poſſunt $2^{12} - 1 \infty 4095$ vicibus.

Nota: Si quis examinet ſeries combinationum ſupra in typo expoſitas, obſervabit, in quâlibet ſerie (ſolâ primâ exceptâ, quæ unicum unionem *a* complectitur) numerum electionum ſecundùm exponentes pares æquari numero electionum ſecundùm impares; ſaltem cùm id in aliquot ab initio ſeriebus verum deprehenderit, idemque quoque in ſerie proximè ſequente locum habere concludet: nam litera, quæ illius ſeriei caput eſt, juncta præcedentium ſerierum electionibus iis, quæ impares exponentes habent, parium; & iis viciſſim quæ pares habent juncta, imparium exponentium complexiones efficit; adſciſcens verò primæ ſeriei unionem *a*, paris, & ipſa per ſe ſola accepta imparis exponentis electionem conſtituit; unde & in hâc ſerie numerum harum numero illarum æquari conſtat. In omnibus igitur ſeriebus ſimul ſumtis numerus electionum ſecundùm impares exponentes numerum electionum ſecundùm pares unitate ſuperabit; aut ſi his inſuper nullionem accenſeas, æquabit. Quocirca cùm numerus omnium electionum ſimpliciter incluſo nullione oſtenſus ſit 2^n, erit ejus ſemiſſis ſive poteſtas binarii proximè minor 2^{n-1} numerus electionum ſecundùm ſolos impares; &, dempto rurſum nullione, $2^{n-1} - 1$ numerus electionum ſecundùm ſolos pares exponentes. Idem quoque demonſtrabitur infrà in Coroll. 6. Cap. 4.

Cap. III.

De Combinationibus ſecundùm ſingulos exponentes ſeorſim; ubi de Numeris Figuratis, eorumque proprietatibus agitur.

Ex typo Combinationum præcedentis capitis manifeſtum fit, literam quæ cujuslibet ſeriei caput eſt, adjunctam unionibus ſeriėrum præcedentium efficere ſuæ ſeriei biniones, adjunctam binionibus efficere terniones, ternionibus 4^{ones}, & ſic porrò: adeoque numerum binionum in quàvis ſerie æquari ſummæ unionum in omnibus ſeriebus antecedentibus, numerum ternionum ſummæ binionum, numerum quaternionum ſummæ ternionum & generaliter numerum combinationum ſecundùm datum quemcunque exponentem in ſerie quâcunque æquari ſummæ combinationum omnium præcedentium ſerierum ſecundùm exponentem unitate minorem dato. Sequitur hinc, quòd

Uniones, quia in ſingulis ſeriebus reperiuntur ſinguli, omnes inter ſe conſtituunt ſeriem 1. 1. 1. 1. 1. &c. ſeu, ſeriem unitatum.

Biniones in primâ ſerie nulli ſunt, in ſecundâ 1, in tertiâ 1 + 1 ∞ 2, in $4^{\text{tâ}}$ 1 + 1 + 1 ∞ 3, in 5ta 1 + 1 + 1 + 1 ∞ 4 &c. proinde omnes biniones inter ſe conſtituunt ſeriem 0. 1. 2. 3. 4. 5. &c. hoc eſt, ſeriem numerorum Arithmeticè progreſſionalium ſive Lateralium.

Terniones in primâ & ſecundâ ſerie nulli ſunt, in $3^{\text{tiâ}}$ 1, in $4^{\text{tâ}}$ 1 + 2 ∞ 3, in $5^{\text{tâ}}$ 1 + 2 + 3 ∞ 6, in $6^{\text{tâ}}$ 1 + 2 + 3 + 4 ∞ 10. &c. omnes itaque ordine accepti ſeriem conficiunt 0. 0. 1. 3. 6. 10. 15. &c. hoc eſt, ſeriem numerorum, ut vocant, Trigonalium.

Quaterniones in tribus primis ſeriebus nulli ſunt, in $4^{\text{tâ}}$ 1, in $5^{\text{tâ}}$ 1 + 3 ∞ 4, in $6^{\text{tâ}}$ 1 + 3 + 6 ∞ 10, in $7^{\text{mâ}}$ 1 + 3 + 6 + 10 ∞ 20 &c. qui omnes ordine aſſumti ſeriem efficiunt 0. 0. 0. 1. 4. 10. 20. &c. ſeriem videl. Pyramidalium.

Pari

Pari ratione Quiniones omnes ſeriem conſtituunt Trianguli-pyramidalium 0.0.0.0.1.5.15.35. &c. Seniones ſeriem Pyramidi-pyramidalium 0.0.0.0.0.1.6.21. &c. aliæque combinationes ſecundùm altiores exponentes efficiunt alias atque alias ſeries Figuratorum altioris generis in infinitum.

Et ſic occaſione Doctrinæ Combinationum in ſpeculationem inſperatam Numerorum Figuratorum incidimus, quâ appellatione vulgò inſigniuntur numeri, qui ex continuâ Arithmeticè proportionalium indeque ortorum numerorum additione vel collectione generantur.

Ut verò hæ figuratorum numerorum ſeries ſub unum aſpectum caderent, eoque faciliùs comprehenderentur quæ de illis dicenda ſuperſunt, ſequentem appoſui Tabellam, quam quis nullo negotio quouſ-

Tabula

Combinationum, ſeu Numerorum Figuratorum.

Exponentes Combinationum.

Numeri Rerum Combinandarum.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5.	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
6.	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
7.	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
8.	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
9.	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
10.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
11.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
12.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

quouſque voluerit tum deorſum tum dextrorſum continuabit. Numeri barbari in ſiniſtro Tabulæ margine adſcripti numerant columnas tranſverſas, & ſimul rerum combinandarum multitudinem; numeri verò Romani in ſupremo margine conſpicui numerant columnas verticales & unà exponentes combinationum innuunt. Columnarum verticalium prima eſt ſeries Monadum ſeu unitatum, ſecunda ſeries numerorum naturalium ſeu lateralium ab unâ cyphrâ incipiens, tertia ſeries Trigonalium incipiens à cyphris duabus, 4ta Pyramidalium incipiens à tribus, 5ta Trianguli-pyramidalium incipiens à 4 cyphris; & ſic deinceps.

Habet hæc Tabula proprietates planè eximias & admirandas; præterquàm enim quòd Combinationum myſterium in illâ latere jam oſtendimus, notum eſt interioris Geometriæ peritis, præcipua etiam totius reliquæ Matheſeos arcana inibi deliteſcere. Nos proprietatum aliquas hîc delibabimus, & quidem delibabimus tantùm, nullius niſi primariæ illius, quæ propoſito noſtro inſervit demonſtrationem accuratiorem allaturi, cùm cæteræ vel ex hâc oſtendi poſſint, vel ex ipsâ Tabellæ conſtructione & numerorum figuratorum geneſi ſatis pateſcant.

Mirificæ proprietates Tabulæ Combinationum:

1. Columnarum verticalium ſecunda incipit ab unâ cyphrâ, tertia à cyphris duabus, 4ta à 3bus; & generaliter columna c à cyphris $c-1$.

2. Columnarum verticalium termini primi ſignificativi à ſiniſtrâ dextrorſum obliquè deſcendendo ordine ſumti reddunt ipſos terminos primæ columnæ verticalis, ſecundi ſecundæ, tertii tertiæ, & ita deinceps: putà, primi conſtituunt ſeriem monadum, ſecundi lateralium, tertii trigonalium &c.

3. Secundus ab unitate terminus columnæ verticalis cujuslibet æquatur ipſius columnæ numero.

4. Terminus quivis Tabellæ æquatur ſummæ omnium ſuperiorum præcedentis columnæ verticalis.

5. Quilibet terminus æquatur duobus aliis immediatè ſupra

ſe po-

ſe poſitis, quorum unus eſt in eâdem verticali columnâ, alter in praecedente.

6. Columnæ cujuſvis tranſverſæ termini ab unitate aliquouſque creſcunt, deinde per eoſdem gradus rurſum decreſcunt. Idem intellige de ſummis columnarum verticalium æque-altarum, ceu terminis ſequentis columnæ tranſverſæ, per 4 propr.

7. Columnarum verticalium æque-altarum baſes, ſive termini columnæ tranſverſæ cujuslibet, primus quidem & ultimus ſignificativus perpetuò inter ſe æquantur, ut & ſecundus & penultimus, tertius & antepenultimus, atque ita porrò, ſi columna pluribus terminis ſignificativis conſtet.

8. Quin & ſumtis ab initio columnis verticalibus quotcunq; cum totidem tranſverſis, collectiſque in unam ſummam qui in eâdem verticali ſibi reſpondent terminis, erit ſumma prima æqualis penultimæ, ſecunda antepenultimæ, tertia proantepenultimæ, & ſic deinceps. Exhibent enim hæ ſummæ ipſos columnæ transverſæ ſequentis terminos primò excepto. Conf. propr. 4 & 7. Ex. gr. Quinque primæ columnæ tum verticales tum transverſæ ſunt:

1.	0.	0.	0.	0.	
1.	1.	0.	0.	0.	
1.	2.	1.	0.	0.	
1.	3.	3.	1.	0.	
1.	4.	6.	4.	1.	
5.	10.	10.	5.	1.	Termini ſextæ columnæ transverſæ primo excepto.

9. Columnæ transverſæ ordine exhibent coëfficientes omnium poteſtatum à radice aliquâ binomiâ genitarum; nempe ſecunda coëfficientes radicis 1.1. tertia quadrati 1.2.1. quarta cubi 1.3.3.1. quinta biquadrati 1.4.6.4.1. & ſic porrò.

10. Summæ ſerierum transverſarum progrediuntur in continuâ ratione duplâ: ſummarum verò ſummæ ab initio collectæ terminos conſtituunt progreſſionis duplæ unitate multatos; putà

1	∞ 1	1	∞ 1 ∞ 2—1
1+1	∞ 2	1+2	∞ 3 ∞ 4—1
1+2+1	∞ 4	1+2+4	∞ 7 ∞ 8—1
1+3+3+1	∞ 8	1+2+4+8	∞ 15 ∞ 16—1
1+4+6+4+1	∞ 16	1+2+4+8+16	∞ 31 ∞ 32—1

Fluit ex iis, quæ in præced. cap. de Combinationibus ſimpliciter ſpectatis dicta ſunt.

11. Termini ſeriei verticalis cujuslibet ordine diviſi per terminos collaterales ſeriei præcedentis (initio vel ab unitate vel à ſuis reſpectivè cyphris facto) exhibent quotos Arithmeticè proportionales, quorum communis differentia eſt fractio, cujus numerator eſt unitas, & denominator ipſe numerus ſive ſecundus ab unitate terminus ſeriei dividentis. Ex. gr.

Diviſ.)	*divid.*	*(quot.*	*diviſ.)*	*divid.*	*(quot.*	*diviſ.)*	*divid.*	*(quot.*	*diviſ.)*	*divid.*	*(quot.*
1)	1	(2:2	1)	0	(0:2	1)	1	(3:3	1)	0	(0:3
2)	3	(3:2	2)	1	(1:2	3)	4	(4:3	3)	1	(1:3
3)	6	(4:2	3)	3	(2:2	6)	10	(5:3	6)	4	(2:3
4)	10	(5:2	4)	6	(3:2	10)	20	(6:3	10)	10	(3:3
5)	15	(6:2	5)	10	(4:2	15)	35	(7:3	15)	20	(4:3

Non difficulter hæc proprietas, ſi opus foret, deduci poſſet ex ſequente.

12. Summa terminorum quotcunque ſeriei verticalis cujuslibet à ſuis reſpectivè cyphris incipientis ad ſummam terminorum totidem ultimo æqualium eam habet rationem, quam habet unitas ad illius ſeriei numerum; hoc eſt, Aggregatum numerorum quotcunq; lateralium ab unâ cyphrâ ſeriem auſpicantium eſt ad aggregatum numerorum totidem maximo eorum ceu ultimo æqualium, ut 1 ad 2; trigonalium à cyphris duabus, ut 1 ad 3, pyramidalium à tribus, ut 1 ad 4. &c. Idem quoque valet de ratione, quam habet ſumma terminorum ſeriei cujuslibet ab unitate incipientis ad ſummam totidem maximum ſequenti termino æqualium. Ex. gr.

				0	6		
0	3	1	5	0	6	1	15
1	3	2	5	1	6	3	15
2	3	3	5	3	6	6	15
3	3	4	5	6	6	10	15
6.12::1.2		10.20::1.2		10.30::1.3		20.60::1.3	

0	10			
0	10	1	56	
0	10	4	56	
1	10	10	56	&c.
4	10	20	56	
10	10	35	56	
15.60::1.4		70.280::1.4		

Cùm inter affectiones numerorum figuratorum hæc præcipua ſit, eademque ſcopo noſtro primariò inſerviat, viſum hìc eſt exponere methodum, quâ talem proprietatis ἀπόδειξιν exhibeo, quæ ſimul & ſcientifica ſit, & propoſitum univerſaliter concludat. Quem in finem ſequentia præſtruo lemmata:

1. *Lemma*: Summa terminorum quotlibet primæ ſeriei ad ſummam totidem terminorum ultimo æqualium rationem habet æqualitatis, ſive ut 1 ad 1.

Dem. Cùm enim ſeries meris conſtet unitatibus, erit ſumma terminorum quotlibet, ſumma tot unitatum, h. e. tot terminorum ultimo æqualium, quot ſunt termini.

2. *Lemma*: In qualibet ſerie à ſuis reſpectivè cyphris incipiente, ſi quota eſt ipſa inter ſeries, tot ab initio ſumantur termini, erit ſumma terminorum omnium ad ſummam totidem ultimo æqualium, ut 1 ad ſeriei numerum.

Dem. Numerus enim cyphrarum quamcunque ſeriem auſpicantium unitate minor eſt ſeriei numero, per propr. 1. his igitur ſi accedat ſequens terminus, numerus terminorum ſeriei numero æquabitur; ſed terminus, qui proximè cyphras ſequitur, eſt unitas, per

M 2 propr.

propr. 2. unde terminorum aggregatum æquatur unitati, & aggregatum totidem ultimo æqualium ipſi ſeriei numero; quare conſtat.

3. *Lemma*: In quâcunque numerorum ſerie, ſi ſumma terminorum ab initio ſumtorum ad ſummam totidem ultimo æqualium perpetuò eandem habeat rationem, quotcunque accipiantur termini, putà ut 1 ad R, ita ut ſumma terminorum æquetur ſummæ totidem ultimo æqualium diviſæ per R; erit numerus terminorum aſſumtorum ablato R ad eundem numerum unitate multatum, ut ſumtorum penultimus ad ultimum.

Dem. Sumti ſint ab initio termini quotlibet A. B. C. D. quorum numerus ſit N, penultimus C, & ultimus D. Eſt utique A + B + C ∞ A + B + C + D — D, hoc eſt, per hypoth. $\frac{C \text{ in } N-1}{R}$ ∞ $\frac{D \text{ in } N}{R}$ — D & æque-multiplicando, C in N — 1 ∞ D in N — D in R ∞ D in N — R, adeoq; N — R . N — 1 :: C . D. Quod erat demonſtrandum.

4. *Lemma*: In Tabulâ numerorum figuratorum ſi duæ ſint columnæ verticales contiguæ, in quarum priore quotlibet ab initio termini ad totidem ultimo eorum æquales habeant conſtantem rationem ut 1 ad *r*; habeant verò in poſteriore termini aliquot ab initio ſumti ad totidem ſumtorum ultimo æquales rationem ut 1 ad *r* + 1: habebit quoque addito ſequenti termino, ſumma omnium terminorum unà cum adjecto ad tot terminos adjecto æquales, quot ſunt cum adjecto termini, rationem ut 1 ad *r* + 1.

Dem. Sumti ſint in poſteriore columnâ termini E. F. G. H, quos proximè ſequatur I; atque ſumantur in columnâ immediatè præcedente termini totidem A. B. C. D; ſumtorum verò utrinque numerus ſit *n*. Erit *r* H ∞ (ex num. figurat. geneſi per propr. 4) *r* in A + B + C ∞ (per hyp.) *n* — 1 in C ∞ (per lemma 3) *n* — *r* in D; quare *n* — *r* . H :: *r* . D :: (hypoth.) *n* . A + B + C + D :: (ex num. fig. geneſi per propr. 4) *n* . I. Unde *n* — *r* in I ∞ *n* H ∞ (hypoth.) *r* + 1 in E + F + G + H; adeoque *n* — *r* . *r* + 1 :: E + F + G + H . I, & componendo *n* + 1 . *r* + 1 :: E + F + G + H + I . I, hoc eſt, E + F + G + H + I . *n* + 1 in I :: 1 . *r* + 1. Q. E. D.

Cum olim horum Fratri copiam feciſſem, animadvertit ille poſſe demon-

demonſtrationem eleganter abbreviari, poſtremis tribus lemmatibus in unum conflatis, hoc modo:

Lemma: In Tab. num. fig. ſi ſumma terminorum ab initio ſeriei verticalis cujuſvis ad ſummam totidem maximo æqualium ubique rationem habeat ut 1 ad r, habebit ſumma terminorum ſeriei proximè ſequentis ad ſummam totidem maximo æqualium rationem ut 1 ad $r+1$.

Dem: Sint ſeries ſequentes $a.b.c.d.$&c. & $o.g.h.i.$ &c. numerus terminorum prioris ſit n, poſterioris $n+1$.

$$n\left\{\begin{array}{l} a - - o \\ b - - g \\ c - - h \\ d - - i \\ e - - l \\ f - - p \\ \quad\quad\;\; q \end{array}\right\}n+1.$$

Eſt primò $q+p+l+i+h+g+o \infty$ (ex hyp. & geneſi num. fig. per propr. 4) $\frac{nf}{r}+\frac{\overline{n-1}.e}{r}+\frac{\overline{n-2}.d}{r}+\frac{\overline{n-3}.c}{r}+\frac{\overline{n-4}.b}{r}+\frac{\overline{n-5}.a}{r} \infty \frac{n.\overline{f+e+d+c+b+a}-e-2d-3c-4b-5a}{r} \infty$ (ex gen. num. fig.) $\frac{nq-p-l-i-h-g}{r}$. Ergò $rq+r.\overline{p+l+i+h+g} \infty nq-p-l-i-h-g$; factâque translatione convenienti $\overline{r+1}.\overline{p+l+i+h+g} \infty nq-rq$: dividatur utrinq; per $r+1$, erit $p+l+i+h+g \infty \frac{nq-rq}{r+1}$; additoque q habebitur $q+p+l+i+h+g \infty \frac{nq-rq}{r+1}+q \infty \frac{\overline{n+1}.q}{r+1}$, hoc eſt, $g+h+i+l+p+q.\ \overline{n+1}.q :: 1.\ r+1$. Q.E.D. Sequitur nunc *Propoſitio principalis*: In Tab. num. fig. ſumma terminorum quotlibet à ſuis reſpectivè cyphris incipientium ad ſummam totidem ultimo æqualium; item ſumma terminorum quotvis incipientium ab unitate ad ſummam totidem ultimum ſequenti æqualium, in ſerie primâ ſeu monadum eſt ut 1 ad 1, in ſerie ſecundâ ſeu lateralium ut 1 ad 2; in tertiâ ſeu trigonalium ut 1 ad 3, in 4^{tâ} ſeu pyramidalium ut 1 ad 4, & generaliter in ſerie quâcunque ut 1 ad illius ſeriei numerum.

Dem. I. De primâ ſerie conſtat ex primo lemmate: de ſecundâ, tertiâ, 4^{tâ} &c. è reliquis. Nam quia ſumma terminorum quotlibet ad ſummam totidem ultimo æqualium in primâ ſerie eſt ut 1 ad 1, erit vi horum lemmatum in 2^{dâ} ut 1 ad $1+1 \infty 2$; & quia in

$2^{\text{dâ}}$ eſt ut 1 ad 2, erit in $3^{\text{tiâ}}$ ut 1 ad $2 + 1 \infty 3$; & propterea etiam in $4^{\text{tâ}}$ ut 1 ad $3 + 1 \infty 4$; in $5^{\text{tâ}}$ ut 1 ad $4 + 1 \infty 5$; & generaliter in ſerie c ut 1 ad c.

II. Quia rationem 1 ad $r + 1$ memoratam in ultimo lemmate hîc interpretamur per rationem 1 ad c, erit $r \infty c - 1 \infty$ (per propr. 1.) numero cyphrarum, à quibus columna c incipit. Quare cùm in dicto lemmate repertum ſit $g + h + i + l + p \infty \frac{n - r \,.\, q}{r + 1} \infty \frac{n - r \,.\, q}{c}$, ſequitur quòd $g + h + i + l + p$ (ſumma terminorum quorum numerus eſt n) ſe habet ad q in $n - r$ (numerum terminorum minùs numero cyphrarum) ſicut 1 ad c; hoc eſt, ſumma terminorum quotlibet ab unitate incipientium ad totidem terminos ſequenti ultimum æquales, ut 1 ad c.

Conſectarium: Ex hâc oſtensâ proprietate facilè nunc eſt, invenire tum terminum optatum, tum ſummam terminorum ſeriei cujuslibet: Sumti intelligantur termini æque-multi ex pluribus continuè columnis, & ſit numerus ſumtorum ab initio cujusque columnæ n, adeoque numerus terminorum ab unitate (excluſis cyphris initialibus) in ſecundâ columnâ $n - 1$, in tertiâ $n - 2$, in $4^{\text{tâ}}$ $n - 3$, &c. per 1 propr. quo poſito quæſitum ita colligo: Summa terminorum n primæ columnæ, nempe, n unitates ſeu $\frac{n}{1}$ æquatur termino $n + 1$, hoc eſt, termino ſequenti ultimum ſecundæ columnæ, per 4 propr. ex tabulæ geneſi. Quare termini hujus in $n - 1$ (numerum terminorum ab unitcte $2^{\text{dæ}}$ columnæ) ducti ſubduplum, ſeu $\frac{n \,.\, n - 1}{1 \,.\, 2}$, per 12 propr. æquale eſt aggregato terminorum $2^{\text{dæ}}$ columnæ, & ſimul per 4 propr. ipſi termino ſequenti ultimum tertiæ col. Unde ſimiliter hujus termini in $n - 2$ (num. termin. ab unitate $3^{\text{tiæ}}$ col.) ducti ſubtriplum, nempe $\frac{n \,.\, n - 1 \,.\, n - 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, æquatur per 12 propt. aggregato terminorum $3^{\text{tiæ}}$ columnæ, inſimulque per 4 propr. ipſi termino ſequenti ultimum $4^{\text{tæ}}$. Quocirca & hujus termini in $n - 3$ (num. term. ab unit. $4^{\text{tæ}}$ col.) ducti ſubquadruplum, putà $\frac{n \,.\, n - 1 \,.\, n - 2 \,.\, n - 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$, exhibet ſummam terminorum $4^{\text{tæ}}$ columnæ, unâque terminum qui ſequitur ultimum $5^{\text{tæ}}$; & rurſus iſtius termini in $n - 4$ ducti ſubquintu-

plum

plum $\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}$ producit ſummam terminorum col. $5^{tæ}$, & ſimul terminum qui excipit ultimum $6^{tæ}$; atque ita conſequenter. E quibus igitur infertur, quòd ſumma terminorum n primæ columnæ ſit $\frac{n}{1}$, $2^{dæ}$ $\frac{n.n-1}{1.2}$, $3^{tiæ}$ $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$, $4^{tæ}$ $\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}$, $5^{tæ}$ $\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}$, & generaliter columnæ c, $\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4\ldots n-c+1}{1.2.3.4.5\ldots c}$. Et quia quælibet harum quantitatum etiam exprimit terminum $n+1$ ſequentis columnæ, ſequitur quòd ipſe illius terminus optatus ſeu ultimus n habeatur mutato ſolummodò ubique n in $n-1$; adeoque quòd terminus optatus, ſecundæ columnæ ſit $\frac{n-1}{1}$, tertiæ $\frac{n-1.n-2}{1.2}$, $4^{tæ}$ $\frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3}$, $5^{tæ}$ $\frac{n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4}$, & generaliter columnæ c, $\frac{n-1.n-2.n-3.n-4\ldots n-c+1}{1.2.3.4\ldots c-1}$.

Scholium: Multi, ut hoc in tranſitu notemus, numerorum figuratorum contemplationibus vacârunt (quos inter Faulhaberus & Remmelini Ulmenſes, Walliſius, Mercator in Logarithmotechniâ, Preſtetus, aliique) ſed qui proprietatis hujus demonſtrationem univerſalem dederit & ſcientificam, novi neminem. Walliſius in Arithm. Infinitorum fundamentum ſuæ methodi jacturus, rationes quas habent ſeries Quadratorum, Cuborum aliarumque poteſtatum numerorum naturalium ad ſeriem totidem maximo æqualium, inductione inveſtigat; indeque prop. 176 ad contemplationem Trigonalium, Pyramidalium, reliquorumque figuratorum tranſit: ſed ſatius fuiſſet forteque naturæ rei convenientius, ſi vice verſâ tractationem numerorum figuratorum, eamque univerſali & accuratâ demonſtratione munitam præmiſiſſet, ac tum demum ad poteſtatum ſummas inveſtigandas perrexiſſet. Præterquam enim quod modus demonſtrandi per inductionem parùm ſcientificus eſt, inſuperque pro qualibet ſerie peculiarem operam depoſcit; illa utique omnium judicio præcedere debent, quæ cæteris naturâ ſunt priora & ſimpliciora, quales videntur eſſe numeri figurati præ poteſtatibus, tum quod

quod illi additione, hæ multiplicatione generantur, tum & præcipuè quod ſeries figuratorum à ſuis reſpectivè cyphris incipientes ad ſeries æqualium rationem habent exactè ſubmultiplicem, qualem non habere poſſunt ſeries poteſtatum (ſaltem in terminis numero finitis) absque aliquo exceſſu vel defectu quicunque cyphrarum numerus ipſis præfigatur. De cætero namque ex cognitis figuratorum ſummis nihilo difficilius inveſtigari poterunt poteſtatum ſummæ, atque ex his priores collegit auctor; quod quomodo fiat, paucis oſtendam.

Proponatur ſeries numerorum naturalium ab unitate 1.2.3.4.5. &c. uſque ad n, & quærantur omnium ipſorum, item omnium quadratorum, cuborum &c. ex ipſis ſummæ: Quoniam in tab. combinat. terminus ſecundæ columnæ indefinitè eſt $n-1$, & ſumma omnium terminorum, hoc eſt, ſumma omnium $n-1$ ſeu $\int \overline{n-1}$ per conſect. præcedens inventa $\frac{n.\overline{n-1}}{1.2} \infty \frac{nn-n}{2}$, erit $\int \overline{n-1}$ ſive $\int n - \int 1 \infty \frac{nn-n}{2}$, & $\int n \infty \frac{nn-n}{2} + \int 1$; ſed $\int 1$ (ſumma omnium unitatum) eſt n; quare ſumma omnium n ſeu $\int n \infty \frac{nn-n}{2} + n \infty \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$.

Porrò cum terminus tertiæ columnæ indefinitè acceptus per idem conſect. ſit $\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2} \infty \frac{nn-3n+2}{2}$, & ſumma omnium terminorum (hoc eſt, omnium $\frac{nn-3n+2}{2}$) $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3} \infty \frac{n^3-3nn+2n}{6}$; erit $\int \frac{nn-3n+2}{2}$ ſive $\int \frac{1}{2}nn - \int \frac{3}{2}n + \int 1 \infty \frac{n^3-3nn+2n}{6}$, & $\int \frac{1}{2}nn \infty \frac{n^3-3nn+2n}{6} + \int \frac{3}{2}n - \int 1$; ſed $\int \frac{3}{2}n \infty \frac{3}{2}\int n \infty$ (per modo oſtenſa) $\frac{3}{4}nn + \frac{3}{4}n$, & $\int 1 \infty n$: unde his ſubſtitutis fit $\int \frac{1}{2}nn \infty \frac{n^3-3nn+2n}{6} + \frac{3nn+3n}{4} - n \infty \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{4}nn + \frac{1}{12}n$, ejusq; duplum $\int nn$ (ſumma quadratorum ex omnibus n) $\infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$.

Rurſus quia terminus n 4tæ columnæ eſt $\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3} \infty \frac{n^3-6nn+11n-6}{6}$, & ſumma omnium terminorum $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4}$

∞n^4

$\infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24}$, erit utique $\int \frac{n^3 - 6nn + 11n - 6}{6}$, hoc eſt, $\int \frac{1}{6}n^3 - \int nn + \int \frac{11}{6}n - \int 1 \infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24}$, indeque $\int \frac{1}{6}n^3 \infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24} + \int nn - \int \frac{11}{6}n + \int 1$. Et quoniam per modo inventa $\int nn \infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$; nec non $\int \frac{11}{6}n$ ſive $\frac{11}{6}\int n \infty \frac{11}{12}nn + \frac{11}{12}n$, & $\int 1 \infty n$; hinc factâ horum ſubſtitutione emerget $\int \frac{1}{6}n^3 \infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24} + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n - \frac{11}{12}nn - \frac{11}{12}n + n \infty \frac{1}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^3 + \frac{1}{24}nn$, ejusque proin ſextuplum $\int n^3$ (ſumma cuborum) $\infty \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$. Atque ſic porrò ad altiores gradatim poteſtates pergere, levique negotio ſequentem adornare laterculum licet:

Summæ Poteſtatum.

$$\int n \infty \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{2}n.$$
$$\int nn \infty \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{6}n.$$
$$\int n^3 \infty \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}nn.$$
$$\int n^4 \infty \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 * - \tfrac{1}{30}n.$$
$$\int n^5 \infty \tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 * - \tfrac{1}{12}nn.$$
$$\int n^6 \infty \tfrac{1}{7}n^7 + \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 * - \tfrac{1}{6}n^3 * + \tfrac{1}{42}n.$$
$$\int n^7 \infty \tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 * - \tfrac{7}{24}n^4 * + \tfrac{1}{12}nn.$$
$$\int n^8 \infty \tfrac{1}{9}n^9 + \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 * - \tfrac{7}{15}n^5 * + \tfrac{2}{9}n^3 * - \tfrac{1}{30}n.$$
$$\int n^9 \infty \tfrac{1}{10}n^{10} + \tfrac{1}{2}n^9 + \tfrac{3}{4}n^8 * - \tfrac{7}{10}n^6 * + \tfrac{1}{2}n^4 * - \tfrac{1}{12}nn.$$
$$\int n^{10} \infty \tfrac{1}{11}n^{11} + \tfrac{1}{2}n^{10} + \tfrac{5}{6}n^9 * - 1n^7 * + 1n^5 * - \tfrac{1}{2}n^3 * + \tfrac{5}{66}n.$$

Quin imò qui legem progreſſionis inibi attentius inſpexerit, eundem etiam continuare poterit abſq; his ratiociniorum ambagibus: Sumtâ enim c pro poteſtatis cujuslibet exponente, fit ſumma omnium n^c ſeu

$$\int n^c \infty \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c.c-1.c-2}{2.3.4}Bn^{c-3} + \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4}{2.3.4.5.6}Cn^{c-5} + \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4.c-5.c-6}{2.3.4.5.6.7.8}Dn^{c-7} \ldots$$

& ita deinceps, exponentem poteſtatis ipſius n continuè minuendo binario, quouſque perveniatur ad n vel nn. Literæ capitales A, B, C, D &c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$ &c. nempe A $\infty \frac{1}{6}$, B

∞ $-\frac{1}{30}$, C ∞ $\frac{1}{42}$, D ∞ $-\frac{1}{30}$. Sunt autem hi coëfficientes ita comparati, ut ſinguli cum cæteris ſui ordinis coëfficientibus complere debeant unitatem; ſic D valere diximus $-\frac{1}{30}$, quia $\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{7}{15}+\frac{2}{9}$ (+D) $-\frac{1}{30}$ ∞ 1. Huius laterculi beneficio intra ſemi-quadrantem horæ reperi, quòd poteſtates decimæ ſive quadrato-ſurſolida mille primorum numerorum ab unitate in ſummam collecta efficiunt

91,409,924,241,424,243,424,241,924,242,500.

E quibus apparet, quàm inutilis cenſenda ſit opera Iſmaëlis Bullialdi, quam conſcribendo tam ſpiſſo volumini Arithmeticæ ſuæ Infinitorum impendit, ubi nihil præſtitit aliud, quàm ut primarum tantum ſex poteſtatum ſummas (partem ejus quod unicâ nos conſecuti ſumus paginâ) immenſo labore demonſtratas exhiberet.

Antequam caput hoc finiamus, paucis adhuc indicare lubet, quomodo ſuppoſitis iis, quæ de ſeriebus figuratis oſtenſa ſunt, poſſint quævis etiam aliæ ſeries figuratarum analogæ (quæ ſcil. differentias ſuas primas, ſecundas, tertias &c. æquales habent, adeoque ex continua additione terminorum alicujus ſeriei æqualium generantur) ad homologas figuratas reduci, ac proinde ſummari, vel poſtremi ipſarum termini inveniri: Sit ſeries quævis æqualium D, ex cujus additione naſcatur ſeries C, & ex hujus additione ſeries B, & ex hujus tandem collectione ſeries A, ſumtis ad arbitrium primis ſerierum terminis d, c, b, a. Vocabitur ſeries A figuratarum analoga, cujus differentiæ primæ conſtituunt ſeriem B, ſecundæ ſeriem C, tertiæ ſeriem D, &c. Et quoniam apparet, ſeriem A componi ex ſeriebus unitatum 1, 1, 1, 1 &c. lateralium 1, 2, 3, 4. &c.

D	C	B	A.
d	c	b	a
d	$c+d$	$b+c$	$a+b$
d	$c+2d$	$b+2c+d$	$a+2b+c$
d	$c+3d$	$b+3c+3d$	$a+3b+3c+d$
d	$c+4d$	$b+4c+6d$	$a+4b+6c+4d$
d	$c+5d$	$b+5c+10d$	$a+5b+10c+10d$

trigonalium 1, 3, 6, 10, &c. pyramidalium 1, 4, 10, 20. &c. in primos differentiarum terminos a, b, c, d, ſeorſim ductis, quarumque omnium poſtremi termini & ſummæ per ante dicta habentur, ipſius

quoque

quoque hinc ſeriei A poſtremum terminum & ſummam terminorum obtineri poſſe conſtat; nimirum ſi numerus terminorum vocetur n, erit ultimus terminus ſeriei A $\infty\ a + \overline{n-1}\,.\,b + \frac{\overline{n-1}\,.\,\overline{n-2}}{2}\,c + \frac{\overline{n-1}\,.\,\overline{n-2}\,.\,\overline{n-3}}{2\,.\,3}\,d$; & ſumma omnium terminorum $\infty\ na + \frac{n\,.\,\overline{n-1}}{2}\,b + \frac{n\,.\,\overline{n-1}\,.\,\overline{n-2}}{2\,.\,3}\,c + \frac{n\,.\,\overline{n-1}\,.\,\overline{n-2}\,.\,\overline{n-3}}{2\,.\,3\,.\,4}\,d$.

CAPUT IV.

Invenire numerum Combinationum ſecundùm ſingulos exponentes ſeorſim; ubi ſimul oſtenditur, in quot combinationibus una pluresvé res præſcriptæ conjunctim vel diviſim reperiantur.

EX cap. præc. conſtat, numerum combinationum ſecundùm quemcunque exponentem æquari aggregato reſpectivæ ſeriei numerorum figuratorum, ad tot terminos continuatæ, quot fuerint combinandæ res. Quare cùm ibidem ſit oſtenſum, poſito numero terminorum n ſummam ſeriei cujusvis c eſſe $\frac{n\,.\,\overline{n-1}\,.\,\overline{n-2}\,.\,\overline{n-3}\ \ldots\ \overline{n-c+1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ \ldots\ c}$, ſequitur, eandem hanc quantitatem exprimere quoque numerum combinationum, ſumtis n pro multitudine rerum combinandarum, & c pro exponente combinationis.

Patet autem, quantitatem iſtam deſignari per geminam progreſſionem arithmeticam, unam à numero rerum deſcendentem, aſcendentem ab unitate alteram, quarum communis exceſſus eſt unitas, & utraque tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens c: quippe cùm in utrâque differentia primi & ultimi termini ſit $c-1$. Unde talis emergit

Regula

pro inveniendis Combinationibus ſecundùm datum exponentem:

Flant duæ Progreſſiones Arithmeticæ, una deſcendens à numero rerum combinandarum, altera aſcendens ab unitate, quarum communis differentia ſit unitas, & utraque tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens: tum factum ex ductu terminorum prioris progreſſionis dividatur per factum ex ductu terminorum poſterioris. Quotiens erit quæſita combinationum, quæ ſecundùm datum exponentem inſtitui poſſunt, multitudo.

Ita ex. gr. ex 10 diverſis rebus ſumi poſſunt quaternarii

$$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} \infty \frac{5040}{24} \infty 210.$$

Nota: Si pluſculæ res ad combinandum ſint propoſitæ, præſertim ſecundum exponentem itidem majuſculum; ut ſi propoſitum ſit inquirere, quoties ex rebus centum vicenæ poſſint accipi, ſupputatio ſecundum regulam inſtituenda perquàm prolixa & tædioſa evaderet, excreſcente producto multiplicationis ad 40 uſque notas. Quare tum, ut quæſitum compendio conſequamur, poterimus terminos progreſſionum ante multiplicationem per communes diviſores tollere, hâc ratione:

$$\frac{100.\cancel{99}.98.97.\cancel{96}.95.94.93.92.\cancel{91}.\cancel{90}.89.88.87.86.\cancel{85}.\cancel{84}.83.82.81}{1.\cancel{2}.\cancel{3}.4.\cancel{5}.\cancel{6}.\cancel{7}.\cancel{8}.\cancel{9}.10.\cancel{11}.\cancel{12}.\cancel{13}.\cancel{14}.\cancel{15}.16.\cancel{17}.18.19.20}$$

Divido utrumq; fractionis terminum per 9. 11 ∞ 99, per 8. 12 ∞ 96, per 7. 13 ∞ 91, per 6. 14 ∞ 84, per 5. 17 ∞ 85, & per 2. 3. 15 ∞ 90, delendo numeros alteros ex numeratore, ex denominatore alteros, ut fractio ad minores terminos reducta ſit hæc:

$$\frac{100.98.97.95.94.93.92.89.88.87.86.83.82.81}{1.4.10.16.18.19.20}$$

Deinde

Deinde divido utrinque per 100, delendo ſuperiùs 100, & ſcribendo inferius 2 loco 10.20 ∞ 200; iterum divido per 8, ſcribendo ſuperius 11 loco 88, inferius delendo modò aſcripta 2.4 ∞ 8: porrò quia 5.19 ∞ 95, deleo infra 19, ſupra loco 95 ſcribo 5: divido utrinque per 9, ſcribendo ſuperius 9 loco 81, & inferius 2 loco 18: divido per 4, ponendo ſuperius 23 loco 92, inferius 4 loco 16: tandem divido ter per 2, ſubſtituendo ſuperius 41, 43 & 47 loco 82, 86 & 94, inferius delendo omnia. Sic erit reducta ſeries ad hos terminos, 98, 97.93.89.87.83.47.43.41.23.11.9.5; qui in ſe ducti continuè exhibent 535983370403809682970 numerum vicenariorum in rebus centum.

Quòd ſi quis in numeris tam prolixis, ubi exacta præciſio neceſſaria non eſt, eâ quæ ad uſum ſufficit acquieſcere velit, is utiliter & magno cum compendio Logarithmos adhibebit. Nam ſi ſummam Logarithmorum ab 1 ad 20 (quæ reperitur 18.3861244) ſubtrahat à ſummâ Log-orum ab 81 ad 100 (quæ eſt 39.1152756,) vel etiam ipſorum tantùm numerorum 98.97.93. &c. (qui poſt inſtitutam progreſſionum reductionem remanſerunt) Logarithmos addat, ſtatim obtinebit 20.7291512 Log-um numeri combinationum quæſiti, qui numerus propter characteriſticam ſui Log-i 20 conſtare debet notis 21. Harum priores quatuor in Canone reperiuntur 5359, ſequentes tres è comparatis proximorum Log-orum differentiis eliciuntur 833, cætera 14 loca cyphris ſuppleri poſſunt, ſic ut quæſitus combinationum numerus ὡς ἐν πλάτει acceptus ſit

5 3 5 9 8 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.

Porrò ex allatâ Regulâ, quam pro inveniendis combinationibus ſecundum ſingulos exponentes adduximus, ſequentia manant corollaria:

Cor. 1. In dato quovis rerum numero, creſcente exponente combinationis quouſque medium numeri rerum attigerit, creſcit ipſa combinationum multitudo; creſcente verò ulterius exponente, hæc iterum decreſcit: Ita in rebus octo plures continentur biniones quàm uniones, terniones quàm biniones, quaterniones quam terniones; ſed ſi pergas ulterius, pauciores invenies quinarios quàm quaternarios, ſenarios quàm quinarios &c. Conf. propr. 6 Tab. num. fig. Etenim 8 vel $\frac{8}{1}$ numerus unionum in rebus octo coontinuè ductus in $\frac{7}{2}$. $\frac{6}{3}$. $\frac{5}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{3}{6}$.

52076

$\frac{4}{5}.\frac{3}{6}$. &c. ſucceſſivè producit $\frac{8.7}{1.2}, \frac{8.7.6}{1.2.3}, \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}, \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}, \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6}$ &c. qui juxta regulam ſunt numeri binionum, ternionum, quaternionum, quinionum, ſenionum &c. Unde cùm priorum factorum $\frac{7}{2}.\frac{6}{3}.\frac{5}{4}$ ſinguli ſint majores unitate, reliqui $\frac{4}{5}.\frac{3}{6}$ &c. unitate minores, ſequitur, ſucceſſiva producta ex iſtis factoribus, hoc eſt, numeros combinationum aliquouſque continuè creſcere, & poſtmodùm iterum decreſcere debere. Quòd verò creſcant, donec exponens combinationis dimidium rerum numerum attingit, inde liquet, quòd fractionum iſtarum $\frac{8}{1}.\frac{7}{2}.\frac{6}{3}.\frac{5}{4}$. &c. (ex quarum continuo ductu numeri combinationum reſultant, quarumque primus numerator perpetuò rerum numerum, denominator primus unitatem æquat) termini ſuperiores & inferiores pro unoquoque ſequentium exponentium binario ſibi propiores fiunt (illis unitatis decrementum, his incrementum paſſis) proindeque ſe mutuò aſſequuntur in tot terminis, quot indicat ſemiſſis primi numeratoris ſive dimidius rerum datarum numerus; poſt quos terminos ipſi denominatores ſuis viciſſim numeratoribus majores ſunt, & ab iis majori ſubinde intervallo recedunt.

Cor. 2. Duo exponentes, qui ſimul componunt ipſum rerum numerum (*quos parallelos* vocabimus) combinationes habent æquè multas. Sic in rebus octo tot habentur ſeptenarii quot unitates, tot ſenarii quot binarii, & tot quinarii quot ternarii, propter 8 ∞ 7 + 1 ∞ 6 + 2 ∞ 5 + 3. Huc refer propr. 6 & 7 Tab. num. fig. Ratio evidens: Quoties enim ex rebus octo ex. gr. binæ accipiuntur toties utique aliæ ſenæ relinquuntur: ergò toties quoque è converſo ſenæ poſſunt accipi, ſumtis nimirum iis quæ relinquebantur antea & relictis quæ ſumebantur. Idem ex præſcripto regulæ ſic evincitur: Juxta illam numerus binariorum in rebus octo eſt $\frac{8.7}{1.2}$; adjiciantur numeratori & denominatori factores progreſſivi æque-multi, quoad adjectorum ultimus in denominatore primo adjectorum in numeratore æquetur, ſcil. $\frac{6.5.4.3}{3.4.5.6}$; ſic factum ex adjectis æquatur unitati, numeratoribus & denominatoribus inverſo ordine ſe mutuò deſtruentibus; ipſumque adeò productum integrum $\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6}$ non dif-

fert

fert à numero binariorum $\frac{8 . 7}{1 . 2}$: patet autem facilè, productum illud indigitare numerum ſenariorum, ſeu combinationum quarum exponens unà cum binario datum rerum numerum complet; quandoquidem primus adjectorum in numeratore (qui per hyp. poſtremo adjectorum in denominatore, h. e. ipſi combinationis exponenti æquatur) à primo omnium ſeu ipſo rerum numero tot unitatibus differt, quot ipſum alii præcedunt, hoc eſt, quot unitates habet exponens combinationum, quarum numerum præcedentes factores $\frac{8 . 7}{1 . 2}$ inſinuabant.

Cor. 3. Exponens æqualis ſemiſſi numeri rerum, ſi datus rerum numerus eſt par; aut duo exponentes contigui quorum ſumma conſtituit rerum numerum, ſi hic eſt impar, ſuppeditant maximum numerum combinationum. Fluit ex præcedd Corollariis. Nam ex. gr. in rebus octo numeri ſeptenariorum & unitatum, ſenariorum & binariorum, quinariorum & ternariorum æquantur. per 2. Coroll. Cùm ergò plures dentur quaternarii, quàm ternarii, binarii vel unitates per 1. Cor. etiam plures erunt quaternarii, quàm combinationes ſecundùm ullum alium exponentem. Similiter in rebus novem numeri octonariorum & unitatum, ſeptenariorum & binariorum, ſenariorum & ternariorum, quinariorum & quaternariorum æquantur per 2. Cor. Cùm igitur quinarii & quaternarii quoad ſuos exponentes ſint medio numeri rerum proximi, patet eorundem numeros omnium reliquorum maximos eſſe, per 1. Cor.

Cor. 4. Numerus combinationum rerum quotcunque ſecundùm exponentem quemlibet ejusve parallelum æquatur numero permutationum rerum totidem, quæ duûm tantùm ſint generum taleſque ut res ejusdem generis numero conveniant cum exponentibus parallelis combinationum; putà, tot ſunt, ternarii vel quaternarii, in rebus 7, quot permutationes rerum totidem, ſi tres ipſarum ſunt eædem, & reliquæ quatuor eædem. Nam numerus ternariorum juxta regulam $\infty \frac{7 . 6 . 5}{1 . 2 . 3} \infty \frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7}{1 . 2 . 3 . 4 \, in \, 1 . 2 . 3} \infty$ numero permutationum dictarum per Reg. 2. Cap. I hujus.

Cor. 5. In quolibet rerum numero, multitudo combinationum ſecundùm datum exponentem æquatur ſummæ combinationum

ſecun-

ſecundùm exponentem antecedentem & datum in numero rerum præcedenti; ex gr. tot ſunt quaterniones in rebus decem, quot terniones & quaterniones ſimul in rebus novem. Namque per regulam numerus quaternionum in rebus decem $\infty \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} \infty \frac{9.8.7 \text{ in } 6+4}{1.2.3.4} \infty \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} + \frac{9.8.7.4}{1.2.3.4} \infty \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} + \frac{9.8.7}{1.2.3} \infty$ numero quaternionum plus numero ternionum in rebus novem. Aliter ita: Una decem rerum datarum vocetur A; manifeſtum, tot dari præcisè quaternarios in quibus A non reperitur, quot quaternarii ex reliquis novem poſſunt accipi; tot verò eſſe alios in quibus reperitur A, quot terniones comprehenduntur in novem cæteris, ſiquidem ſingulis iſtis ternionibus adjectum ipſum A totidem quaterniones efficit, quos omnes A ingreditur ex conſtruct. Quare cùm quaterniones illi in quibus reperitur A, & in quibus non reperitur, exhauriant omnes quaterniones poſſibiles ex datis rebus accipiendos, conſtat propoſitum. Conf. propr. 4 & 5 Tab. num. fig.

Cor. 6. Numerus combinationum ſecundùm omnes exponentes pares (incluſo nullione) æquatur numero combinationum ſecundùm omnes impares, proinde utervis ſemiſſis eſt numeri omnium combinationum ſimpliciter (incluſo quoque nullione) h. e. cùm iſte in rebus n ſit 2^n per Reg. cap. 2. utervis illorum erit 2^{n-1}. Demonſtratum habetur ibidem ad calcem dicti capitis, ſed idem quoque ex præced. Coroll. ſic deducitur: In rebus ex. gr. novem eſt unus novenarius, ſicut in rebus decem unus denarius, deinde utrobique eſt unus nullio, ac præterea tot ſunt unitates & binarii ſimul in rebus novem, quot ſoli binarii in rebus decem; tot ibi ternarii & quaternarii ſimul, quot hîc ſoli quaternarii; tot quinarii & ſenarii ibi, quot hîc ſenarii; tot denique ſeptenarii & octonarii ibi, quot ſoli octonarii hîc, per præced. Coroll. 5. quare numerus omnium ſimpliciter combinationum rerum novem æquatur numero combinationum rerum decem ſecundùm exponentes pares. Rurſus, per idem Coroll. tot habentur in rebus novem nulliones & unitates ſimul, quot unitates tantùm in rebus decem; tot ibi binarii & ternarii ſimul, tot quaternarii & quinarii, tot ſenarii & ſeptenarii, tot denique octonarii & novenarii, quot hîc ſeorſim ternarii, quot quinarii, quot ſeptena-

ſeptenarii & quot novenarii: quocirca numerus omnium ſimpliciter combinationum rerum novem æquatur etiam numero combinationum rerum decem ſecundùm exponentes impares. Ergo numeri combinationum rerum decem ſecundùm exponentes pares & ſecundum impares inter ſe æquantur. Ecce rem in ſynopſi:

Exponentes Combinat.

Res Combinandæ.	X	O + II + IV + VI + VIII + X
	IX	O + I + II + III + IV + V + VI + VII + VIII + IX
	X	I + III + V + VII + IX

Superſunt nobis hîc loci nonnullæ quæſtiones enodandæ, quæ circa combinationum materiam formari poſſunt, ſuumque aliquando uſum habent; ut, cùm indagandum proponitur, in quot combinationibus una pluresve res imperatæ ſive conjunctim ſive diviſim reperiantur. Ejuſmodi quæſtiones cùm in infinitum multiplicari poſſint, omnes ad unum genus Problematis reducere conabimur, quod univerſaliter ſic enunciamus: Dato numero rerum combinandarum & exponente combinationis inveniendum ſit, in quot combinationibus ex aliquot deſignatis rebus nonnullæ, quæ & ipſæ præſcriptæ & determinatæ ſint, excluſis cæteris reperiantur; putà, ſi ex numero rerum omnium n, combinatarum ſecum invicem ſecundùm exponentem c, deſignentur aliquæ A, B, C, D, E, quarum numerus ſit m, ſive major ſive minor exponente c, & quæratur in quot combinationibus deſignatarum nonnullæ A, B, C, quarum numerus ſit b, unà junctæ reperiantur excluſis cæteris D & E. Dico, Problematis generaliter ſic concepti ſolutionem non minus promptam eſſe, ac ſpecialis cujusvis caſus; & numerum combinationum quas recipiunt res $n-m$ ſecundùm exponentem $c-b$ (quique numerus per Regulam invenitur $\frac{n-m.n-m-1.n-m-2.n-m-3....n-m-c+b+1}{1.2.3.4.5.....c-b}$) ipſi confeſtim quæſito ſatisfacere. Nam quia numerus rerum combinatarum eſt n, & deſignatarum ex illis m, erit exemptis deſignatis reliquarum numerus $n-m$, quas ſi combines inter ſe ſecundùm exponen-

 tem

tem $c-b$, habebis novas combinationes, in quibus nulla deſignatarum reperitur; quare ſi illarum ſingulis adjungas præſcriptas A, B, C, quarum numerus ponitur b, fiet tum utique combinationum exponens c, ipſæ verò combinationes ſingulæ comprehendent ex deſignatis ſolas A, B, C, ſecluſis reliquis, quod imperatum fuit. Quòd ſi numerus b, earum ex deſignatis, quæ combinationes optatas ingredi debent, ſit quidem determinatus, ipſæ verò res non ſint determinatæ, ſed quomodolibet ex deſignatis accipiendæ; patet, numerum combinationum hinc toties multiplicari, quoties ex deſignatis m rebus diverſæ b res eligi poſſunt, nempe per regulam $\frac{m.m-1.m-2\ldots m-b+1}{1,2.3\ldots b}$ vicibus; ſic ut tum numerus combinationum quæſitus ſit $\frac{m.m-1.m-2\ldots m-b+1}{1.2.3\ldots b}$ in $\frac{n-m.n-m-1.n-m-2\ldots n-m-c+b+1}{1.2.3.4\ldots c-b}$

Nota, ſi $n-m < c-b$, nulla inſtitui poteſt combinatio, quæ præſcriptam conditionem habeat. Sed hæc ad nonnullos ſpeciales caſus applicabimus:

Quæritur primò, in quot combinationibus reperiatur data quælibet res? Quia hîc deſignatur res unica, erit m & $b \infty 1$, adeoque $\frac{n-m.n-m-1.n-m-2\ldots n-m-c+b+1}{1.2.3.4\ldots c-b} \infty \frac{n-1.n-2.n-3\ldots n-c+1}{1.2.3.4\ldots c-1}$ ∞ numero combinationum quæſito, qui quidem ad numerum omniũ combinationum $\frac{n.n-1.n-2.n-3\ldots n-c+1}{1.2.3.4\ldots c}$ ſe habet ut c ad n, exponens ſcil. combinationis ad numerum rerum combinatarum, uti conſtat, ſi utraque fractio dividatur per $n-1.n-2.n-3\ldots n-c+1$, & multiplicetur per $1.2.3.4\ldots c$.

2. Sunto jam deſignatæ res duæ A & B, & deſiniendus ſit combinationum numerus, in quibus reperitur A abſque B. Quia hîc $m \infty 2$, & $b \infty 1$, erit numerus quæſitus $\frac{n-2.n-3.n-4\ldots n-c}{1.2.3.4\ldots c-1}$, cujus proinde duplum, numerum combinationum denotabit, in quibus alterutra ipſarum A & B abſque alterâ reperitur.

3. Porrò ſi quæratur, in quot combinationibus reperiantur

ambæ

ambæ A & B; fiet, propter m & b ∞ 2, optatus numerus $\frac{n-2.n-3.n-4\ldots n-c+1}{1.2.3.4\ldots c-2}$.

4. Sin quæratur, in quot combinationibus neutra deſignatarum reperiatur, invenitur, ob m ∞ 2 & b ∞ 0, quæſita combinationum multitudo $\frac{n-2.n-3.n-4\ldots n-c-1}{1.2.3.4\ldots c}$.

5. Ita etiam ſi rerum deſignatarum tres ſint, & quæſtio ſit, quot combinationes ingrediantur duæ A & B abſque tertiâ C; quo caſu m valet 3 & b 2; quæſitus combinationum numerus invenitur $\frac{n-3.n-4.n-5\ldots n-c}{1.2.3.4\ldots c-2}$. Et quia ex tribus ter binæ poſſunt accipi, triplum illius numerum combinationum exhibebit, quas duæ deſignatarum quæcunque exclusâ tertiâ ingrediuntur. Atque ita porrò in aliis.

Appendix: Explicatâ numerorum figuratorum naturâ, uſuque quem in combinationibus præſtant, inſtituti noſtri *filum* tantiſper deſeremus, promiſſi in fine Propoſ. 7 Part. I facti memores, donec porrò hîc oſtenderimus, quomodo expectationes duorum colluſorum indefinitè ad quotvis deficientes luſus in ſymbolis exhiberi poſſint, quod olim quoque Paſcalium occupavit; Duo autem præſtò ſunt modi, quibus id conſequi licet: unus reconditior, ex conſtructione Tabellæ ibidem inſertæ & conſideratione progreſſionis, quam numeri illius inter ſe ſervant, petitus; quem nunquam ſe aſſequi potuiſſe ſcribit Paſcalius in epiſtolâ ad Fermatium, ut legere eſt in hujus operibus Toloſæ impreſſis A. 1679, p. 180: alter magis planus & obvius, ex combinationum doctrinâ immediatè dimanans, quo Auctor ille in ſuâ Problematis ſolutione videtur uſus.

I. *Mod.* Sint duo colluſores A & B, quorum illi n, huic m ludi ad vincendum deſint, & quærenda ſit utriuſque expectatio, h. e. quærendus ſit in dictâ Tabellâ numerus areolæ n columnæ verticalis m. Adjecti intelligantur in columnarum capitellis tot termini progreſſionis duplæ ab unitate, quota eſt unaquæque inter columnas; unus primæ, duo ſecundæ. tres tertiæ columnæ &c. hoc pacto:

	I.	II.	III.	IV.	V.	
					1	
				1	2	
			1	2	4	m
		1	2	4	8	
	1	2	4	8	16	
1	1 : 2	3 : 4	7 : 8	15 : 16	31 : 32	
2	1 : 4	4 : 8	11 : 16	26 : 32	57 : 64	n
3	1 : 8	5 : 16	16 : 32	42 : 64	99 : 128	
4	1 : 16	6 : 32	22 : 64	64 : 128	163 : 256	

Et apparebit primo intuitu, progreſſiones has duplas ordine continuari per denominatores fractionum in columnis, adeò ut denominator areolæ n columnæ cujuslibet m ſit terminus $m + n$ progreſſionis duplæ ab unitate, i. e. poteſtas binarii, cujus exponens $m + n - 1$, ſive, 2^{m+n-1}. Ad numeratores verò fractionum quod attinet, perpendi debet quòd unusquiſq; eorum ex conſtructione Tabellæ loc. cit. inſinuatâ æquetur duobus aliis, quorum unus illi immediatè ſupra, alter ad ſiniſtram poſitus eſt; hinc enim inferri poteſt, numeratorem areolæ n columnæ cujuslibet æquari quoque ſummæ omnium n numeratorum columnæ præcedentis unà cum terminis ipſi in vertice adjectis ac præterea unitati; indeque porrò haud difficilius colligitur, quòd ſeries numeratorum ſecundæ columnæ (unà cum terminis ipſi præfixis) diſcerpi poſſit in duas alias ſeries, tertiæ in tres, quartæ in quatuor, & generaliter columnæ cujuslibet m in alias m ſeries, &c. quarum primæ ſemper ſint ſeries monadum, ſecundæ ſeries lateralium cum unâ in vertice cyphrâ, tertiæ ſeries trigonalium cum cyphris duabus, quartæ pyramidalium cum cyphris tribus, & ita deinceps, hâc ratione:

Unde

	I.	II.	III.	IV.	V.	
					1+0+0+0+0	} m
				1+0+0+0	1+1+0+0+0	
			1+0+0	1+1+0+0	1+2+1+0+0	
		1+0	1+1+0	1+2+1+0	1+3+3+1+0	
	1	1+1	1+2+1	1+3+3+1	1+4+6+4+1	
1	1	1+2	1+3+3	1+4+6+4	1+5+10+10+5	} n
2	1	1+3	1+4+6	1+5+10+10	1+6+15+20+15	
3	1	1+4	1+5+10	1+6+15+20	1+7+21+35+35	
4	1	1+5	1+6+15	1+7+21+35	1+8+28+56+70	

Unde cùm terminus $m+n$, per conſect. Cap. 3 hujus, in ſerie monadum ſit 1, in ſerie lateralium $\frac{m+n-1}{1}$, trigonalium $\frac{m+n-1.m+n-2}{1.2}$, pyramidalium $\frac{m+n-1.m+n-2.m+n-3}{1.2.3}$ &c. & generaliter in m ſerie $\frac{m+n-1.m+n-2.m+n-3\ldots m+n-m+1\,(n+1)}{1.2.3.4\ldots m-1}$; erit numerator areolæ n columnæ cujuslibet m, $1+\frac{m+n-1}{1}+\frac{m+n-1.m+n-2}{1.2}+\frac{m+n-1.m+n-2.m+n-3}{1.2.3}+\ldots\ldots$ uſque ad $+\frac{m+n-1.m+n-2.m+n-3\ldots n+1}{1.2.3.4\ldots m-1}$. Et quia per Cap. 4. iisdem hujus quantitatis membris etiam multitudo denotatur nullionum, unionum, binionum, ternionum &c. in rebus $m+n-1$ comprehenſorum, ſequitur dictum numeratorem conflari ex aggregato omnium nullionum, unionum, binionum, cæterarumque ordine combinationum rerum $m+n-1$ uſque ad illas incluſivè combinationes, quarum exponens ſit $m-1$: idemque proin aggregatum diviſum per 2^{m+n-1} exhibiturum totam fractionem datæ areolæ, h. e. per hyp. optatam expectationem colluſoris A, ſeu partem depoſiti 1, quæ colluſori debetur, cui n ludi deficiunt, dum alteri ludi m. Nota: ſi $m \propto n+1$, hoc eſt, ſi colluſori B unus tantùm luſus deficiat amplius quàm ipſi A, portio depoſiti quæ huic debetur æqualis cenſebitur aggregato combinationum re-

 rum

rum $2n$, à nullione ad illas incluſivè quæ habent n pro exponente, diviſo per 2^{2n} (qui numerus eſt omnium ſimpliciter combinationum rerum $2n$ per Cap. 2). Hinc ergò ſi demas ſemiſſem omnium ſimpliciter Combinationum (nempe à nullione ad dimidium earum numerum quæ exponente n gaudent, uti colligitur ex Coroll. 2 & 3 hujus) diviſum per integram ſummam omnium abſolutè combinationum, h. e. ſi demas $\frac{1}{2}$ (partem depoſiti quam contulit colluſor A) relinquetur pro lucro ipſius A. ſive pro eo quod ipſi ex pecuniâ alterius debetur, ſemiſſis combinationum ſecundùm ſolum exponentem n diviſus per ſummam omnium abſolutè combinationum 2^{2n}; qui quidem ſemiſſis cùm ſe habeat ad $\frac{1}{2}$ (id quod depoſuit alter B) ut integer numerus combinationum ſecundùm exponentem n dictâ ratione diviſus (hoc eſt, per Reg. cap. hujus, ut $\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3....n+1}{1.2.3.4....n}$ diviſus per 2^{2n}) ad 1, manifeſtum facit, partem quæ debetur colluſori A ex eo quod depoſuit alter B, exprimi per $\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3....n+1}{1.2.3.4....n}$ div. per 2^{2n}. Ex. gr. ſi $n \infty 8$ & $m \infty 9$, h. e. ſi colluſori A deficiant 8 luſus, ipſique B 9, debebitur illi ex pecuniâ hujus portio, $\frac{16.15.14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ &c. div. per 2^{16}, quæ portio factoribus paribus numeratoris reâpſe octies per 2 diviſis, & ſingulis factoribus denominatoris per 2 multiplicatis reducitur ad fractionem $\frac{1.3.5.7.9.11.13.15}{2.4.6.8.10.12.14.16}$ oriundam ex diviſione producti octo primorum imparium per productum totidem primorum parium numerorum. Ipſa ſolutio Paſcaliana, quæ Auctori ſuo tantopere arriſit.

II. *Mod.* Alter modus ſolvendi Problema, qui ex conſideratione combinationum immediatè fluit, ſic habet: Diſquiro, quot ludi inſtituendi ſint, ut unus colluſorum (nec niſi unus) numerum ſuorum luſuum neceſſariò compleat ac vincat; videoque requiri $m+n-1$ ludos: etenim abſolutis $m+n-2$ ludis, quorum unus evicerit $m-1$, alter $n-1$ ſic ut utriq; unicus deſit proximus luſus alterutrum colluſorum infallibiliter victorem reddet. Fingo itaque inſtitui ab ipſis $m+n-1$ ludos non quòd paucioribus ludis alterutri conſtare victoria non poſſit quâ ſemel obtentâ finita eſt alea, ſed quia re-

ſidui

ſidui ad $m + n - 1$ ludi, ſi maximè inſtituerentur, complendo quoque alterius numero non ſufficiunt, eoque victori nequicquam præjudicare poſſunt) fingo inquam inſtitui à colluſoribus $m + n - 1$ ludos, & conſidero quòd ipſe A depoſito potiatur, quoties accidit ut alter B aut nullum, aut unum, aut duos, aut tres, &c. aut denique $m - 1$ horum ludorum, nec plures, evincat; id verò tot caſibus contingere poſſe liquet, quot nulliones, uniones, biniones, terniones, &c. ac deniq; combinationes ſecundùm exponentem $m - 1$ in ludis $m + n - 1$ continentur. Quare cùm totidem caſus habeat A ad obtinendum depoſitum 1, & reliquos ad perdendum, ſitq; numerus omnium caſuum $2^{m + n - 1}$ ceu omnium ſimpliciter combinationum; erit ipſius ſors per 1. Cor. 3. Prop. 1. part. æqualis aggregato dictarum combinationum (à nullione ad illas incluſivè, quæ exponente $m - 1$ gaudent) diviſo per $2^{m + n - 1}$, ut ſupra. Nota: ſi numeri deficientium luſuum m & n exiguo differant, ſatius eſt quærere per 5. Coroll. cit. Prop. quantitatem ſolius lucri, ſeu quantitatem expectationis colluſoris A non reſpectu totius depoſiti ſed reſpectu ſolius pecuniæ alterius. Ex. gr. ſit $m \infty n + 1$, adeoque $m + n - 1$ $\infty\ 2n$; denotabitur numerus caſuum, quos habet A ad obtinendam pecuniam alterius (quæ nunc ſit 1) per numerum combinationum in ludis $2n$ ab exponente 0 uſque ad exponentem n; & numerus caſuum, quos habet ad perdendum tantundem, h. e. ad obtinendum -1, per numerum reliquarum combinationum ſecundùm exponentes ſuperiores: quare cùm bini exponentes paralleli, inferior & ſuperior, per Cor. 2 hujus combinationes habeant æque-multas, eoq; ſe mutuò deſtruant, relinquentur pro exceſſu, quo numerus illarum combinationum harum numerum ſuperat, ſolæ combinationes ſecundùm exponentem n ſemiſſem ipſius $2n$, quarum numerus eſt $\frac{2n \,.\, 2n-1 \,.\, 2n-2 \ldots\ldots n+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots n}$, ſic ut inde per dictum Coroll. 5. lucrum colluſoris A reſpectu pecuniæ alterius emergat $\frac{2n \,.\, 2n-1 \,.\, 2n-2 \ldots\ldots n+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots n}$ div. per 2^{2n}, itidem ut ſupra. Neque abſimili modo definietur hoc lucrum in caſu $m \infty n + 2$, aut $m \infty n + 3$ &c. Reperio autem, quòd dato numero n, lucrum ipſius A in caſu $m \infty n + 1$, ſit ad lucrum illius in caſu $m \infty n + 2$, in

in ratione $n+1$ ad $2n+1$; & lucrum in caſu $m \infty n+2$, ad lucrum in caſu $m \infty n+3$, in ratione $2n+4$ ad $3n+4$. &c.

In gratiam eorum, qui ſpeculationibus numerorum delectantur, obiter adhuc addo duas proprietates Tabellæ Prop. 7. Part. I ſubnexæ è quarum utrâvis idem quæſitum exſculpi potuiſſet. Una eſt, quòd numeratores columnæ verticalis tertiæ ſint Trigonales 3, 6, 10, 15, 21. &c. aucti numeratoribus columnæ 2dæ 4, 5, 6, 7, 8, &c. quòd numeratores col. quartæ ſint Pyramidales 4, 10, 20, 35, 56, &c. aucti numeratoribus 3tiæ 11, 16, 22, 29, 37, &c. numeratores columnæ 5tæ Triang. Pyramidales 5, 15, 35, 70, 126, &c. aucti numeratoribus 4tæ 26, 42, 64, 93, 130, &c. incipiendo perpetuò à ſecundis terminis. Altera, quòd numeratores col. 3tiæ ſint Trigonales 6, 10, 15, 21, &c. aucti numeratoribus primæ 1, 1, 1, 1, &c. numeratores 4tæ Pyramidales 10, 20, 35, 56, &c. aucti numeratoribus 2dæ 5, 6, 7, 8, &c. numeratores 5tæ Triang. Pyramidales 15, 35, 70, 126, &c. aucti numeratoribus 3tiæ 16, 22, 29, 37, &c. initio ſemper facto â terniis; atque ſic porrò.

CAP. V.

Invenire numerum combinationum, cùm quælibet rerum combinandarum à cæteris quidem diverſa exiſtit, attamen ſæpiùs in eâdem combinatione recurrere poteſt.

IN Combinationibus præcedd. capitum nullam rem ſecum ipsâ jungi, neque adeò plus ſemel in eâdem combinatione accipi poſſe ſuppoſuimus; nunc verò hanc inſuper conditionem adjiciemus, ut unaquæque res etiam ſecum ipsâ jungi, adeoque in eâdem combinatione ſæpiùs redire queat.

Sunto igitur combinandæ hâc ratione literæ *a*, *b*, *c*, *d*, &c.

Fiant

Fiant tot ſeries quot literæ, & ſingularum capita occupent ſingulæ literæ, ceu totidem uniones, ut factum cap. 2.

Pro binionibus cujusque ſeriei inveniendis, litera, quæ ejus caput eſt, non tantum cum omnibus præcedentibus literis, ut ibi factum fuit, ſed & ſecum ipsâ combinari debet: ſic habebitur in primâ ſerîe unus binarius *aa*; in ſecundâ duo binarii *ab*, *bb*; in tertiâ tres *ac*, *bc*, *cc*; in quartâ quatuor *ad*, *bd*, *cd*, *dd*. &c.

Sic etiam pro formandis ternariis unaquæque litera non modò omnium præcedentium ſerierum, ſed & ſuæmet ſeriei binariis adjungenda: ut habeantur, in primâ ſerie ternarius unus *aaa*; in ſecundâ ternarii tres *aab*, *abb*, *bbb*; in tertiâ ſex *aac*, *abc*, *bbc*, *acc*, *bcc*, *ccc*; & ſic deinceps.

Atque hoc ipſum quoque in combinationibus omnium aliorum exponentium obſervandum; quâ ratione nullam electionum, quæ circa datas res inſtitui queunt, præteriri poſſe liquidò conſtat. En Schema:

a. aa. aaa.

b. ab. bb. aab. abb. bbb.

c. ac. bc. cc. aac. abc. bbc. acc. bcc. ccc.

d. ad. bd. cd. dd. aad. abd. bbd. acd. bcd. ccd. add. bdd. cdd. ddd.

Hinc verò haud difficulter colligimus, uniones omnium ſerierum rurſus efficere ſeriem monadum, biniones ſeriem lateralium, terniones trigonalium, cæterasque combinationes majorum exponentium itidem conſtituere ſeries aliorum figuratorum altioris generis, prorſus ut combinationes præcedd. capitum, hoc ſolo cum diſcrimine, quòd ibi ſeries à cyphris, hîc ab ipſis ſtatim unitatibus incipiant; unde ſi in Tabulam redigantur, hanc diſpoſitionem præ ſe ferent:

Tabula Combinatoria.

Exponentes Combinationum. / *Numeri Rerum Combinandarum.*

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960

Tabulæ autem ita diſpoſitæ duas præcipuè proprietates notare convenit: 1. Quòd columnæ transverſæ congruunt verticalibus, prima primæ, ſecunda ſecundæ, tertia tertiæ, &c. 2. Quòd ſumtis duabus columnis contiguis, ſive verticalibus ſive transverſis, termi-

termi-

terminorum numero æqualium, ſumma terminorum columnæ præcedentis æquatur poſtremo termino columnæ ſequentis.

E quibus facile eſt, invenire ſummam terminorum ſeriei cujusvis, adeoque & numerum combinationum ſecundùm exponentem quemcunque. Nam ſi numerus terminorum, hoc eſt, rerum combinandarum dicatur n, erit ſumma unionum ſeu terminorum ſeriei primæ, hoc eſt, ultimus terminus ſeriei ſecundæ, itidem n.

Intelligatur ſeriei ſecundæ præfixa cyphra, ut numerus terminorum fiat $n+1$; per cujus dimidium ſi multiplicetur terminus ultimus n, erit productum $\frac{n.n+1}{1.2}$ ſumma binionum ſeu terminorum ſecundæ ſeriei, per 12 propr. cap. 3; adeoque & poſtremus terminus tertiæ, per 2 propr. hujus.

Intelligantur ſeriei tertiæ præfixæ duæ cyphræ, fietque numerus terminorum $n+2$; in cujus trientem ſi ducatur terminus ultimus modò inventus $\frac{n.n+1}{1.2}$ exurget $\frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}$ ſumma ternionum ſeu terminorum ſeriei tertiæ, & ſimul etiam poſtremus 4tæ. per easd[illegible].

Eâdem ratione ſumma terminorum quartæ ſeriei ſeu quaternionum invenitur $\frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.2.3.4}$, quintæ ſeriei ſeu quinionum $\frac{n.n.+1.n+2.n+3.n+4}{1.2.3.4.5}$; & in genere ſumma terminorum ſeriei c, ſeu combinationum ſecundùm exponentem c, reperitur $\frac{n.n+1.n+2.n+3\ldots\ldots n+c-1}{1.2.3.4\ldots\ldots c}$. Ubi notandum, quòd exiſtente $c > n$ factores fractionis poſſunt abbreviari dividendo numeratorem & denominatorem per $n.n+1.n+2\ldots\ldots c$, ut habeatur $\frac{c+1.c+2.c+3\ldots\ldots c+n-1}{1.2.3.4\ldots\ldots n-1}$; & quia hæc fractio ad formulam exacta ſimul indicare debet ſummam $c+1$ terminorum ſeriei $n-1$, ſequitur quòd aggregatum n terminorum in ſerie c ſemper æquetur aggregato $c+1$ terminorum in ſerie $n-1$; quæ alia non inelegans hujus Tabellæ proprietas eſt. Inde verò reſultat ſequens

Regula

pro inveniendis combinationibus ſecundùm datum exponentem, cùm eadem res eandem combinationem ſæpiùs ingredi poteſt.

Fiant duæ Progreſſiones Arithmeticæ aſcendentes, altera à numero rerum combinandarum, ab unitate altera, quarum communis exceſſus ſit unitas, & utraque tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens: tum factum ex ductu terminorum prioris progreſſionis dividatur per factum ex ductu terminorum poſterioris; eritque quotiens quæſita combinationum ſecundùm datum exponentem multitudo. Hoc ſenſu numerus quaternionum in 10 diverſis rebus contentorum eſt $\frac{10.11.12.13}{1.2.3.4}$ ∞ $\frac{17160}{24}$ ∞ 715.

Nota: Si combinationis exponens ſit major rerum numero (quod utique fieri poſſe in præſente hypotheſi liquet) compendioſius erit, inchoari priorem progreſſionem ab hoc exponente unitate aucto, & utramque fieri terminorum uno pauciorum, quàm ſunt datæ res. Ita numerus combinationum ſecundùm exponentem 10 in rebus 4 fit $\frac{11.12.13}{1.2.3}$ ∞ $\frac{1716}{6}$ ∞ 286.

Sed & numerum combinationum ſecundùm plures exponentes ab unitate ſe aliquouſque conſequentes, hoc eſt, ſummam ſerierum quotcunque verticalium, nihilo difficiliùs venari licet: Cùm enim ex. gr. 10 primi termini 4 primarum columnarum verticalium iidem ſint qui 4 primi termini 10 primarum transverſarum atque inſuper ſummæ horum terminorum æquentur undecim terminis 4^{tæ} columnæ verticalis demto ſolo primo ſeu unitate (ſingulæ ſcil. ſummæ ſingulis terminis, ut ex propr. 2^{dâ} Tabellæ liquet), manifeſtum eſt, etiam 10 primos terminos 4 primarum columnarum verticalium, h. e. ſummam omnium unionum, binionum, ternionum & quaternionum ſumendorum ex rebus 10, unitate deficere ab undecim primis termi-

nis

nis columnæ 4tæ, hoc eſt, à numero quaternionum ſumendorum ex rebus 11. hoc eſt, à numero combinationum ſumendarum ex rebus unà pluribus ſecundùm datorum exponentium maximum. Quod idem etiam ſic oſtendo: Singulos quaterniones ſumendos ex rebus undecim res undecima vel non ingreditur planè, vel ingreditur ſemel, vel bis, vel ter, vel quater; ſed manifeſtum eſt, quaterniones, quos res undecima non ingreditur, eſſe illos ipſos quos decem reliquæ inter ſe formare poſſunt; nec minus perſpicuum, quòd numerus illorum quos ſemel tantum dicta res undecima ingreditur, æquari debeat numero ternionum ſumendorum ex 10 reliquis; ſicut etiam numerus illorum quos bis ingreditur, numero binionum; & quos ter ingreditur, numero unionum: quandoquidem ternionibus ſemel, binionibus bis, & unionibus ter adjuncta quaterniones efficit: prætereaque conſtat, quòd unus ſit quaternio, quem res undecima quater repetita conſtituit. Unde concluditur, numerum quaternionum comprehenſorum in rebus 11, hoc eſt, unâ pluribus quàm ſunt datæ res, unitate excedere omnes ſimul uniones, biniones, terniones & quaterniones rerum datarum decem; niſi his quoque nullionem accenſere velimus, quo caſu ipſis æquabitur.

Quapropter, cùm exiſtente numero rerum datarum n, & exponentium maximo c, numerus combinationum hujus exponentis in rebus $n+1$ per Reg. cap. 4. inveniatur $\frac{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4 \ldots n+c}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \ldots c}$, fiet numerus combinationum rerum n ſecundùm omnes exponentes ab 1 uſque ad c (utpote unitate ab illo deficiens) $\frac{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4 \ldots n+c}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots c} - 1$. Quòd ſi c majus ſit ipſo n, hoc eſt, exponentium maximus major rerum numero, poterunt fractionis termini eo caſu dividi per $n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \ldots c$, ac proinde quantitas compendioſiùs exprimi, ita $\frac{c+1 \cdot c+2 \cdot c+3 \ldots c+n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n} - 1$. Hinc talis emergit

Regula.

pro inveniendis Combinationibus ſecundùm plures exponentes ab unitate ſe conſequentes:

COnſtituantur duæ Progreſſiones Arithmeticæ aſcendentes, altera à numero rerum combinandarum unitate aucto, ab ipsâ unitate altera, quarum communis exceſſus ſit unitas, & utraque tot terminorum, quot unitatibus conſtat exponentium maximus. (Quòd ſi tamen exponentium maximus major ſit rerum numero, ſatiùs eſt, priorem inchoari ab hoc exponente unitate aucto, & utramque fieri tot terminorum, quot ſunt datæ res.) Tum factum ex ductu terminorum prioris progreſſionis dividatur per factum ex ductu terminorum poſterioris; eritque quotiens quæſita combinationum multitudo, ſi ſcil. ipſum nullionem unà comprehenſum velis; ſin velis excluſum, quotiens unitate multatus quæſitum indicabit. Ita numerus omnium cum nullione unionum, binionum, ternionum & quaternionum in rebus 10 eſt $\frac{11.12.13.14}{1.2.3.4} \infty \frac{24024}{24} \infty 1001$, in rebus tantum tribus $\frac{5.6.7}{1.2.3} \infty \frac{210}{6} \infty 35$; at nullione excluſo numerus combinationum eſt ibi 1000, hic 34.

CAPUT VI.

Invenire numerum combinationum, cum nonnullæ rerum combinandarum ſunt eædem, nulla verò ſæpiùs in combinatione repeti debet, quàm ipſa reperitur in toto rerum numero.

IN præced. capite licitum erat, quamlibet datarum diverſarum rerum ſecum ipſa conjungere toties in combinatione, quot unitates habet ejus exponens; quo pacto dari poteſt combinatio ſecundùm exponentem quemlibet, quæ ex unâ ſolâ re ſæpiùs repetitâ conſtet. Alia quæſtio eſt, cùm determinatus eſt numerus vicium, quibus unaquæque rerum datarum ſecum ipsâ jungi poteſt: ut cùm combinandæ veniunt literæ *a*, *b*, *c*, *d*, eâ lege, ut in nullâ combinatione litera *a* ſæpiùs quàm quinquies, *b* quàm quater, *c* quàm ter, & *d* quàm bis repetatur; ubi manifeſtum eſt, nullam earum combinationum, quarum exponens quinarium ſuperat, ex unâ ſolâ literâ conflari poſſe.

Tantundem autem eſt, ſi quatuor iſtæ literæ dictâ lege inter ſe combinandæ ſunt, acſi datæ forent literæ quatuordecim, interque illas quinque *a*, quatuor *b*, tria c & duo *d*, modis omnibus inter ſe combinandæ, ſed eâ conditione, ut nulla ſæpiùs in combinatione occurrat, quàm ipſa reperitur in toto rerum numero; hoc eſt, acſi data foret quantitas algebraica *aaaaabbbbcccdd* ſive $a^5b^4c^3d^2$, cujus omnes diviſores quærerentur; quandoquidem diviſores alicujus quantitatis aliter non exprimuntur, niſi per totidem combinationes factorum ejus: adeò ut doctrina hujus capitis præcipuè pro inveniendo numero diviſorum datæ alicujus quantitatis inſervire queat.

Liquet primò, unius literæ *a* tot electiones aut diviſores dari poſſe, quoties ipſa in rerum numero occurrit, ſeu quot ipſi in quantitate tribuuntur dimenſiones; adeoque ſi nullionem electionibus vel unitatem diviſoribus accenſere quoque velis, unam dari electionem aut diviſorem ampliùs, putà ſex: 1, a, aa, a^3, a^4, a^5.

Deinde, ſi litera *b* accedat, conſtat illam in ſingulas ſex præcedentium electionum aut diviſorum duci poſſe; unde totidem aliæ naſcuntur electiones; b, ab, aab, a^3b, a^4b, a^5b. Quibus ſi alterum *b* adjungas, ſex novas electiones habebis; bb, abb, $aabb$, a^3bb, &c. Et his ſi tertium *b* applicetur, ſex aliæ electiones emergent, iterumque ſex aliæ, ſi his applicetur quartum: adeò ut litera *b* toties ſex novas electiones ſuppeditet, quoties ipſa in dato rerum numero occurrit, ſeu quot ipſa in propoſitâ quantitate dimenſiones

obtinet

obtinet; nimirum quater ſex electiones; quas omnes b ingreditur ex conſtructione. Unde ſi his ſex primas electiones, quas b non ingreditur, annnumeres, habebis in univerſum quinquies ſex ſive 30 electiones.

In ſingulas porrò harum 30 electionum ſeu diviſorum ſi tertia litera c ducatur, prodibunt 30 novæ electiones; & ſi prodituris eadem litera adjungatur denuò, prodibunt 30 aliæ; iterumque 30 aliæ, ſi applicetur tertiùm: unde ter 30 electiones exurgunt, in quibus omnibus lit. c reperitur. Quibus proin ſi addas præcedentes 30, in quibus illa non reperitur, numerabis in totum quater 30 ſive 120 electiones.

Tandem ſi ſingulas harum 120 electionum vel diviſorum eâdem ratione per quartam literam d ob duas ejus dimenſiones bis multiplices, produces bis 120 novas electiones, quæ omnes literam d continent; adeoque (computatis unà prioribus 120 quæ eandem non continent) omninò ter 120 ſive 360 electiones. Et tantus quoque in univerſum diviſorum numerus exiſtit propoſitæ quantitatis $a^5 b^4 c^3 d^2$, dummodò, quòd hîc ſemper ſubintelligendum eſt, literæ a, b, c & d totidem primos ab unitate & à ſe invicem diverſos numeros indigitent. Patet autem, acceſſione cujuſque literæ numerum omnium præcedentium electionum vel diviſorum toties multiplicari, & ſemel ampliùs, quot literæ accedentis fuerint dimenſiones. Quo obſervato ratio percipi poteſt ſequentis Regulæ:

Regula

pro inveſtigando numero diviſorum alicujus quantitatis datæ, ſive numero combinationum rerum plurium, quarum nonnullæ ſunt eædem:

NUmeros dimenſionum, quibus conſtant ſingulæ diverſæ literæ quantitatem propoſitam conſtituentes, unitate auge, ſicque auctos in ſe invicem ducito: erit productum eorum continuum numerus omnium diviſo-

diviſorum datæ quantitatis, ſeu omnium combinationum, quarum literæ illam conſtituentes ſunt capaces. Ubi tamen unitatem demere memineris, ſi nullionem è combinationibus aut unitatem è diviſoribus expunctam velis. Ex. gr. In quantitate propoſitâ $a^5 b^4 c^3 d^2$ literæ a, b, c, d dimenſiones habent 5, 4, 3, 2, qui numeri unitate ſigillatim aucti efficiunt 6, 5, 4, 3, hi verò in ſe ducti 360 numerum omnium cum nullione combinationum, ſeu omnium cum unitate diviſorum quantitatis datæ.

Nota: Si numerus diverſarum literarum a, b, c, d datam quantitatem conſtituentium ſit n, omneſque literæ æquali dimenſionum numero gaudeant, qui ſit p; fiet per regulam numerus combinationum vel diviſorum $\overline{p+1}^{\,n}$. Et ſpecialiùs ſi p ∞ 1, hoc eſt, ſi datæ quantitatis ſingulæ literæ unam tantùm dimenſionem habent, aut ſi datæ res combinandæ omnes ſunt diverſæ, numerus diviſorum vel combinationum determinatur ad 2^n, reditque hypotheſis capitis ſecundi; cujus proinde ſolutio cum iſtâ conferri poterit, ut utriuſque convenientia appareat.

Qui autem ad diſcurſum præſentis capitis vel leviter attenderit, facilè porrò ſi opus determinabit, in quot electionibus vel diviſoribus quælibet res aut litera reperiatur. Nam ſi quæratur ex. gr. quot diviſores propoſitæ quantitatis $a^5 b^4 c^3 d^2$ ingrediatur litera a, indagandum ſolummodò eſt, quot diviſores incluſâ unitate admittat reliqua quantitas $b^4 c^3 d^2$; his enim (cùm in iis a non reperiatur) ſi literam iſtam adjungas ſemel, habebis omnes diviſores, in quibus a reperitur unius dimenſionis: & ſi adjungas bis, habebis omnes eos in quibus eſt duarum dimenſionum: & ſi ter, illos in quibus trium &c. unde concluditur, tot eſſe diviſores, in quibus litera quælibet ſecundùm eundem dimenſionum numerum reperitur, quot reliquæ literæ in univerſum diviſores admittunt: cùm igitur quantitas $b^4 c^3 d^2$ per regulam præced. recipiat 5. 4. 3 ∞ 60 diviſores (connumerando illis unitatem) complectetur etiam quantitas $a^5 b^4 c^3 d^2$ diviſores totidem, in quibus a unam obtinet dimenſionem, totidemque in quibus duas, tres &c. dimenſiones; adeoque ob quinque dimenſiones ipſius a quinquies 60 ſive 300 diviſores obtinebit, in

quibus iſta litera utcunque ſecundùm aliquem dimenſionum numerum occurrit. Neque difficiliùs definitur numerus electionum aut diviſorum, in quibus reperiantur ex. gr. duæ literæ, *a* cum duabus & *b* cum tribus dimenſionibus; nam ſi ſingulis diviſoribus reliquæ quantitatis $c^3 d^2$ (quorum numerus per regulam invenitur $4 . 3 \infty 12$) adjungas $a^2 b^3$, palàm eſt oriri totidem diviſores optatæ conditionis, nec dari plures, & ſic in aliis.

Plus difficultatis babere forſan videbitur quæſtio, quæ numerum inire iubet diviſorum omnium ex æque-multis dimenſionibus conſtantium, hoc eſt, combinationum ſecundùm ſingulos exponentes ſeorſim. Ad id perquirendum methodum adhibeo, ſimilem illi, quâ ſupra in part. 1, poſt prop. 9 ad numeros jactuum in teſſeris inveſtigandos fui uſus: Scribo ordine omnes exponentes combinationum ſeu omnes dimenſionum numeros, quarum propoſita quantitas capax eſt, nempe à 0 uſque ad 14 pro quantitate $a^5 b^4 c^3 d^2$. Sub horum primis eolloco ſex unitates, unâ vid. plures quàm eſt numerus dimenſionum primæ literæ, quibus ſubjungo ſex alias unitates, & his rurſum ſex alias &c. donec habeam ſeries unitatum unâ plures quàm eſt numerus dimenſionum ſecundæ literæ, ſed ſingulas ſeries uno gradu dextrorſum promoveo, atque tum addo quæ perpendiculariter in eodem gradu ſibi reſpondent unitates, ut fiant numeri 1, 2, 3, 4, &c. Horum deinde numerorum iterum ſeries unâ plures conſtituo quàm eſt numerus dimenſionum tertiæ literæ, illas ſimiliter gradatim ad dextram promovendo, & poſtmodùm addendo, ut prodeant numeri 1. 3, 6, 10, 14 &c. quorum numerorum mox rurſus ordines uno plures, quàm eſt numerus dimenſionum quartæ, gradatim pono & addo, continuaturus eodem tenore ulteriùs, ſi plures literæ adeſſent. En Tabulam:

Numeri

Quantit. ſive Res combinandæ.	Numeri dimenſionum ſeu Exponentes combinationum:														
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
a^5	1	1	1	1	1	1									
		1	1	1	1	1	1								
			1	1	1	1	1	1							
				1	1	1	1	1	1						
					1	1	1	1	1	1					
a^5b^4	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1					
		1	2	3	4	5	5	4	3	2	1				
			1	2	3	4	5	5	4	3	2	1			
				1	2	3	4	5	5	4	3	2	1		
$a^5b^4c^3$	1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1		
		1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1	
			1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1
$a^5b^4c^3d^2$	1	4	10	19	30	41	49	52	49	41	30	19	10	4	1

Quo facto qui ex additione ultimâ reſultant numeri ſinguli, denotabunt multitudinem diviſorum vel combinationum ſecundùm ſingulos dimenſionum numeros ſeu exponentes ſupra ſcriptos. Sic indicante Tabellâ reperio, quòd quantitas propoſita habeat unum diviſorem nullius, 4 diviſores unius, 10 duarum, 19 trium &c. dimenſionum, ſive, quòd habeat unum nullionem, 4 uniones, 10 biniones, 19 terniones, & ſic porrò; qui omnes collectivè ſumti ſummam conficiunt 360, ut oportebat. Qui rationem ſimilis operationis pro teſſeris intellexerit, rationem hujus quoque non difficulter capiet.

Plura de his, diviſoribus præſertim (at nimium ab inſtituto aliena) legere eſt in 5 prioribus ſectionibus miſcellaneis Exercit. Matth. Fr. Schootenii, nec non cap. 3 & 4 Diſſert. Joh. Walliſii de combinationibus Tractatui ejus de Algebrâ ſubnexæ. Quos Auctores adeat qui volet. Nos properamus ad alia.

CAP. VII.

De Combinationibus & Permutationibus mixtim ſpectatis.

IN Combinationibus, de quibus hucuſque ſermo nobis fuit, nulla ordinis ſitûsque ratio habebatur, & unum eundemque ex. gr. ternarium conſtituere intelligebantur literæ *a*, *b*, *c*, quocunq; ſcriberentur ordine, ſeu *abc*, ſeu *acb*, ſeu *bac* &c. Sed quandoque præter complexionum varietatem ipſa quoq; ordinis & diſpoſitionis variatio in rebus combinandis attendenda eſt; quemadmodum fieri ſolet in vocibus & numeris: Alia enim vox eſt ſyllaba *ab*, & alia *ba*; & alius numerus 12, alius 21; quanquam eædem literæ eædemque notæ numerales concurrant ad formandas tum ſyllabas *ab* & *ba*, tum numeros 12 & 21; ſic ut totum diſcrimen à diverſâ earundem diſpoſitione proficiſcatur.

Reſtat itaque. ut hoc & ſequentibus capitibus combinationum & permutationũ doctrinam mixtim contemplemur, indagando, quàm variè plures diverſæ res, aut quarum nonnullæ ſunt eædem, & combinari ſecum invicem, & combinatæ inter ſe transponi poſſint, idq; nunc ſecundùm unum exponentem, nunc ſecundùm plures; & modò ſic, ut nulla rerum datarum ſecum ipſa combinari debeat, modo ſic, ut quælibet etiam ſecum ipſa combinari, pluriesque adeò in eâdem combinatione repeti queat.

1. *Invenire numerum electionum plurium diverſarum rerum, quarum nulla ſecum ipſa combinari debet, ſecundùm unum exponentem.*

Solutio quæſtionis ex præcedentibus promta eſt & facilis: Si multitudo rerum combinandarum dicitur *n*, atque exponens combinationis *c*, numerus combinationum neglectâ conſideratione ordinis inter res combinatas eſt $\frac{n.n-1.n-2.n-3\ldots\ldots n-c+1}{1.2.3.4\ldots\ldots c}$ per cap. 4. Et quia ſingulæ hæ combinationes ex hypoth. conſtant re-

bus

bus diverſis c, quæ per cap. 1. ordinem inter ſe variare poſſunt $1.2.3.4\ldots\ldots c$ vicibus, ſequitur, ſi & ordinis in combinationibus habeatur ratio, earum numerum totidem quoque vicibus majorem fore quàm ubi hæc conſideratio negligitur, ac proinde æquari $\frac{n.n-1.n-2.n-3\ldots\ldots n-c+1}{1.2.3.4\ldots\ldots c}$ in $1.2.3.4\ldots\ldots c$ ꝏ $n.n-1.n-2.n-3\ldots\ldots n-c+1$; id quod ſequentem Regulam ſuggerit:

Regula

pro inveniendo numero combinationum ſecundùm datum exponentem:

Conſtituatur Progreſſio Arithmetica, cujus communis differentia ſit 1, incipiens à numero rerum combinandarum, & deſcendens per tot terminos, quot unitates habet combinationis exponens; eritque factum ex ductu terminorum ejus quæſita combinationum multitudo. Ex. gr. Quaterniones omnes in rebus 10, iique modis omnibus tranſpoſiti ſunt $10.9.8.7$ ꝏ 5040.

Conſectaria: 1. Si combinationis exponens ipſi rerum numero æquatur, tantundem eſt, acſi ſimplices permutationes rerum datarum quærerentur; quippe cùm omnes ſemper ſimul accipiendæ, quæ hypotheſis eſt capitis 1: eritque tum $n.n-1.n-2.n-3\ldots n-c+1$ ꝏ $n.n-1.n-2.n-3\ldots1$ ꝏ $1.2.3.4\ldots n$, quod convenit cum regulâ cap. 1.

2. Omnes res ſimul acceptæ, hoc eſt, combinatæ ſecundùm exponentem æqualem rerum multitudini, tot recipiunt permutationes ordinis, quot recipiunt earundem combinationes omnes ſecundùm exponentem unitate minorem: Ita res 5 toties diſponi poſſunt diverſimodè quinæ, quoties quaternæ; nam permutationes omnes quinque rerum ſunt $1.2.3.4.5$ ſeu $5.4.3.2.1$ per regulam hujus & primi capitis; & permutationes quaternionum omnium ſunt

$5.4.3.2$ per eandem hanc regulam: eſt verò $5.4.3.2 \infty 5.4.3.2.1$. unde liquet &c.

3. Summa unionum & binionum in rebus quotlibet æquatu quadrato numeri rerum: poſito namque rerum numero n, unionum numerus juxta regulam eſt n, & binionum $n.n-1 \infty nn-n$; quorum ſumma $n+nn-n \infty nn$. Sic ex. gr. colligere poſſumus, 9 notas numerales ſignificativas acceptas ſingulas & binas modis omnibus conſtituere novies 9 ſeu 81 diverſos numeros; totidem ſcil. ab 1 ad 100 reâpſe invenimus non plures, ſi reſecemus illos, quos vel cyphra ingreditur, vel idem geminatus character conſtituit.

4. Numerus combinationum ſecundùm exponentem quemlibet æquatur numero permutationum rerum totidem, quarum tot ſint eædem, quot unitates habet exponentis parallelus, reliquarum verò ſingulæ à ſingulis diverſæ. Sic tot ſunt ternarii in rebus 8, quot permutationes rerum 8, quarum 5 ſunt eædem, nempe $8.7.6 \infty \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5} \infty$ num. permutat. per Reg. 2. cap. 1. hujus.

2. *Invenire numerum electionum plurium diverſarum rerum, quarum nulla ſecum ipſa combinanda eſt, abſolutè ſeu ſecundùm omnes exponentes.*

Si addantur numeri combinationum per præced. regulam ſecundùm ſingulos exponentes ſeorſim quæſiti obtinebitur numerus omnium combinationum abſolutè. Idem tamen paulò expeditiùs inveniri poteſt, ſi attendatur ad proprietatem aliquam non contemnendam, quæ ex collatis duobus ejusmodi numeris elicitur.

Sint primò combinandæ res quatuor: Conſtat per præced. reg. numerum unionum eſſe 4, binionum 4.3, ternionum $4.3.2$, quaternionum denique $4.3.2.1$; & propterea numerum omnium combinationum abſolutè $4+4.3+4.3.2+4.3.2.1$.

Sint dein combinandæ res quinque; ubi ſimili modo colligitur, ſummam unionum, binionum, ternionum, quaternionum & quinionum, ſeu numerum omnium abſolutè combinationum eſſe $5+5.4+5.4.3+5.4.3.2+5.4.3.2.1$. Eſt verò $5+5.4+5.4.3+5.4.3.2+5.4.3.2.1 \infty 5$ in

$1+4$

$\overline{+4+4\cdot 3+4\cdot 3\cdot 2+4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$, hoc eſt, numerus combinationum rerum 5 quinquies major numero combinationum rerum 4 unitate aucto. Unde diſcimus, numerum combinationum in rebus quotcunque datis toties excedere numerum combinationum in rebus unâ paucioribus unitate auctum, quot ſunt datæ res. (Intellige, non computato utroque nullione.)

Quocirca cùm unius rei unica ſit electio, addito 1 ad 1 ſummâque 2 multiplicatâ per 2, erit productum 4 numerus omnium combinationum in rebus duabus.

Rurſus addito 1 ad 4, ſummâque 5 multiplicatâ per 3, ſignificabit productum 15 numerum combinationum in rebus tribus.

Similiter addito 1 ad 15, ſummâque 16 ductâ in 4, exurgit 64 numerus combinationum in rebus quatuor.

Hunc unitate auctum ſi ducas in 5, habebis omnes combinationes rerum quinque; atque ita porrò in infinitum, ut ex ſequenti laterculo apparet.

Num. rer. datarum	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	&c.
Num. combination.	1.	4.	15.	64.	325.	1956.	13699.	109600.	986409.	9864100.	&c.

Hâc ratione colligimus, 9 notas numerales, ſi ſumantur ſingulæ, binæ, ternæ, &c. & tandem novenæ, ac transponantur modis omnibns, recipere 986409 mutationes, totidemque proin diverſos numeros formari poſſe, in quorum nullo character aliquis plus unâ vice occurrat.

CAPUT VIII.

3. ***Invenire numerum electionum plurium diverſarum rerum, cùm quælibet earum etiam ſecum ipſa combinari poteſt, ſecundùm unum exponentem.***

In

IN cap. præced, quæſitus fuit combinationum numerus, quando nulla res plus ſemel in eâdem combinatione repeti poterat. Nunc ſupponemus, rem quamlibet etiam ſecum ipsâ jungi, adeoque bis, ter, quater pluriesvé in eâdem combinatione repeti poſſe; inveſtigabimusque, quis hoc ſenſu futurus ſit combinationum numerus, ſi in illis etiam, ut anteà, attendatur ordinis varietas.

Sunto datæ res aut literæ quotlibet *a*, *b*, *c*, *d*, &c. quarum numerus ſit *m*, patet illarum tot uniones poſſe accipi, quot ſunt datæ res, putà *m*.

Applicetur iis prima litera *a*, præponendo illam ſingulis, ita: *aa*, *ab*, *ac*, *ad* &c. & habentur biniones, qui omnes incipiunt ab *a*, quorumque numerus æquari debet ipſi rerum numero *m*.

Deinde applicetur iisdem ſecunda *b*, præfigendo illam ſingulis. ut fiant *ba*, *bb*, *bc*, *bd* &c. qui omnes ſunt biniones à *b* incipientes, quorum proinde numerus itidem ipſi *m* æquatur.

Simili ratione tertia *c*, & quarta *d*, cæteræque ſi plures fuerint, ſingulis datarum rerum ſemel præfigantur, & exurgent novi biniones, quorum nonnulli incipiunt à literâ *c*, alii à *d*, alii à cæterarum aliquâ; eorum verò numerus, qui ab eâdem literâ incipiunt, perpetuò ipſi *m* æquabitur. Quo pacto manifeſtum omnes in univerſum biniones repertos eſſe, eosque modis omnibus inter ſe transpoſitos; quorum proinde numerus toties ſuperabit ipſum rerum numerum, quot ſunt datæ res: quarum cùm hic ſit *m*, binionum omnium numerus erit *mm*.

His verò binionibus ſi denuò applicare pergas datas res, unicuique illorum ſingulas has præponendo, formabis omnes ternionum ordines *aaa*, *aab*, *aac*, *aad*, *aba*, *abb*, &c. quorum qui ab eâdem literâ incipiunt ſemper tot exiſtunt, quot ſunt inventi biniones; omniumque proin numerus binionum numerum toties excedet quot fuerint datæ res, ac conſequenter erit m^3.

Similiter ſi cunctis ternionibus identidem præfigi intelligantur ſingulæ literæ, elicientur omnes quaterniones poſſibiles, quorum per conſequens numerus ternionum numerum rurſus *m* vicibus ſuperabit, eritque m^4.

Atque

Atq; ita apparet, combinationum numerum ſecundùm quemcunque exponentem perpetuò m vicibus ſuperandum eſſe à numero combinationum ſecundùm exponentem proximè ſequentem: ſcilicet cùm numerus quaternionum ſit m^4, erit quinionum numerus m^5, ſenionum m^6, & generaliter ſi exponens dicatur n, numerus combinationum ſecundùm hunc exponentem erit m^n. Unde expedita habetur

Regula

pro inveniendo numero combinationum modis omnibus permutatarum ſecundùm datum exponentem, cùm qualibet res etiam ſecum ipſa combinari poteſt.

DAtus rerum numerus elevetur ad eam poteſtatem, cujus index eſt datus combinationis exponens; & habetur quæſitum. Ex. gr. Omnes novem notarum numeralium quaternarii ſumti & diſpoſiti modis omnibus exhibent $9^4 \infty 9.9.9.9 \infty 6561$ variationes; totidem ſcil. numeros diverſos, rejectis iis qui cyphram unam pluresvé includunt, inter 1000 & 10000 (limites eorum qui 4 characteribus ſcribuntur) interjici neceſſe eſt. Sic 4 vocales A. E. I. O, quibus quadruplex differentia propoſitionum ſecundùm quantitatem & qualitatem in Logicis innuitur, admittunt terniones $4^3 \infty 64$; unde totidem oriuntur modi ſyllogiſmi categorici boni malivé, non 36 tantùm ut voluit Ariſtoteles cum Interpretibus. Quòd ſi indefinitæ & ſingulares propoſitiones ab univerſalibus & particularibus diſtinguerentur, unde octuplex earum naſceretur diſcrimen, numerus modorum omninò ad 512, cubum nim. octonarii, aſſurgeret.

4. *Invenire numerum combinationum ejusmodi ſecundùm plures exponentes*

Quoniam ex iis quæ modò dicta ſunt apparet, numerum unionum in datis rebus m eſſe m, binionum mm, ternionum m^3, quaternio-

ternionum m^4 &c. conſtat, numerum combinationum ſecundùm exponentes plures ab unitate naturali ordine ſe conſequentes, quorum ultimus ſit n, fore $m + mm + m^3 + m^4 \ldots + m^n$, ſummam ſcil. progreſſionis alicujus geometricæ ſecundùm rationem 1 ad m, cujus primus terminus eſt m, & ultimus m^n; quæque ſumma vulgò notâ methodo compendioſiùs exprimitur & unâ quantitate ſic effertur: $\frac{m^n - 1 \text{ in } m}{m - 1}$, ita ut inſtitutâ proportione $m - 1$ ſit ad m, ut $m^n - 1$ ad quæſitum: unde ſequens manat

Regula

pro inveniendo numero combinationum ſecundùm plures exponentes, quorum maximus eſt datus.

Fiat, ut rerum datarum numerus unitate truncatus ad eundem integrum; ſic illius poteſtas, quam indicat exponentium maximus, unitate truncata ad numerum quartum, qui optatam combinationum multitudinem exhibebit. Ex. gr. ad indagandum, quot diverſis modis inter ſe transponi poſſint 10 notæ numerales, ſi accipiantur tum ſingulæ, tum binæ, ternæ, quaternæ, quinæ & ſenæ: vel addi poſſunt ſex primi termini progreſſionis geometricæ 10. 100. 1000. &c. vel, ſi videatur commodiùs, faciendum, ut 9 numerus notarum unitate minutus ad 10 eundem integrum, ſic 999999 ejuſdem poteſtas ſexta ſive quadrato-cubica unitate truncata ad quæſitum: utroque enim modo obtinetur 1111110 quæſitâ diſpoſitionum multitudo.

Notandum verò, non omnes iſtas diſpoſitiones efficere peculiares numeros; quotquot enim numeri à cyphris unâ pluribusvé incipiunt, non differunt ab iis, quos ſoli characteres reliqui neglectis cyphris conſtituerent: quocirca ut ſecernantur utiles à ſuperfluis, conſiderandum, quòd ex decem notis ſolitariis unica eſt inutilis, ipſa ſcil. cyphra: ex numeris, qui duabus conſtant notis, redundant 10; quandoquidem 0 ſingulis decem notis ſemel præponi poteſt: ex iis qui ſcribuntur notis tribus, ſuperflui ſunt 100; ipſa enim 0 aut ter

poſita

poſita eſt ſola, aut bis præfixa ſingulis novem primis numeris, aut ſemel ſingulis inter 9 & 100 interceptis. Ita ex iis qui quatuor characteribus exprimuntur, ſupervacanei ſunt 1000; ſingulis namque numeris, qui paucioribus notis ſcribuntur, quorumque ſi cyphram unà complectaris ſunt manifeſtò mille, præfigi poteſt una alteravé cyphra, ut notarum quaternarius compleatur. Ob ſimilem rationem ex iis, qui ſcribuntur notis quinque, eliminandi 10000, & 100000 ex iis qui conſtant notis ſex: adeò ut, ſi à numero 111110 ∞ 10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000 + 1000000, ſeu ſumma ſex terminorum progreſſionis decuplæ incipientis à 10, auferas 111111 ∞ 1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000 ſummam totidem terminorum ejusdem progreſſionis incipientis ab unitate (quod compendio fit, auferendo ſolummodò primum terminum hujus ab ultimo illius, cùm reliqui omnes ſe mutuo deſtruant) reſiduum 999999 indicet numerum omnium differentium ordinum, qui tribui poſſunt 10 notis numeralibus non ultra ſenas acceptis, ad exprimendum per illos totidem numeros diverſos. Prout ſanè evidens admodùm eſt, quòd ab unitate numerando ad uſque 1000000, primum & minimum eorum numerorum qui ſeptem notis conſtant, inveniuntur præcisè 999999 differentes numeri; cùm numerus 999999, eorum qui ſex ſcribuntur notis maximus & ultimus, immediatè excipiatur à 1000000, ab eoque ſolâ unitate differat.

Non ſecus iniri poteſt numerus omnium combinationum ac permutationum 24 literarum Alphabeti, ſi fiat, ut 23 ad 24, ſic vigeſima quarta poteſtas numeri 24 (neglectâ unitatis ablatione, quâ in tam vaſto numero non opus eſt) ad numerum quæſitum; qui per Logarithmos expeditè invenitur conſtare debere 34 notis, & ſuperare 1391 quinti-milliones. Tantus vid. eſt numerus omnium vocum utilium & inutilium, quæ ex 24 Alphabeti literis modis omnibus formari poſſunt, ſaltem ſi illas non ultra vicenas quaternas combinari poſſe intelligas.

Notare hîc convenit peculiarem συμπάθειαν inter combinationes iſtas & poteſtates multinomiorum: Cùm enim ad inveniendum biniones omnes literarum *a*, *b*, *c*, *d*, ſingulæ cunctis ſint præfigendæ, & ad inveniendum terniones omnes, cunctis binionibus ſingulæ lite-

ræ denuò applicandæ, & ſic porrò, ut initio hujus capitis dictum; idemque etiam fieri ſoleat, ubi quantitas literalis $a+b+c+d$ ducenda eſt in ſe quadratè, cubicè &c. ſequitur, easdem literas, ſi ſpectentur ut partes radicis alicujus multinomiæ, binionibus ſuis exhibere omnia membra quadrati illius, ternionibus cubi, quaternionibus biquadrati &c. adeò ut membra poteſtatis cujusvis aliter non exprimantur niſi per coacervationem combinationum partium radicis, factarum ſecundùm exponentem æqualem poteſtatis indici: hoc tantùm cum diſcrimine, quòd omnia illa membra, quæ iisdem conſtant literis variè tantùm transpoſitis, cùm eandem quantitatem deſignent, brevitatis ſtudio in unum terminum conflari ſoleant, præfixo illi membrorum æquivalentium numero, qui coëfficiens termini vocari conſuevit. Unde diſcere proclive eſt, quòd coëfficiens termini cujusvis exprimat numerum permutationum literarum illum terminum conſtituentium, ipſa verò terminorum multitudo in quâvis poteſtate æquetur numero combinationum, quæ inter partes radicis neglecto earum ordine ſecundùm indicem poteſtatis datæ inſtitui poſſunt, quarumque numerus per cap. 5tum invenitur.

Quod obſervaſſe operæ pretium aliquando non exiguum erit, cùm exinde promtè definiri poſſit tum multitudo terminorum, tum termini cujusvis coëfficiens in quâcunque poteſtate. Ita, ex. gr. decima poteſtas trinomii $a+b+c$, per reg. cap. 5ti conſtabit terminis $\frac{11.12}{1.2}$ ∞ 66, quorum $a^5\,b^3\,cc$ per reg. 2 cap. 1mi coëfficientem habebit $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5 \text{ in } 1.2.3 \text{ in } 1.2}$ ∞ 2520. Pariter cubus radicis quadrimembris $a+b+c+d$ continebitur terminis $\frac{4.5.6}{1.2.3}$ ∞ 20, ejusq; termini aab & abc pro ſuis coëfficientibus acquirent numeros 3 & 6.

Cap. IX.

Invenire numerum electionum rerum plurium, quarum nonnullæ ſunt eædem, nulla

verò ſæpiùs in electione aſſumi debet, quàm ipſa reperitur in toto rerum numero.

HYpotheſis hæc eſt capitis ſexti, niſi quòd ibi omnes diverſi ordines unius combinationis pro unâ eâdemque electione, hîc pro totidem diverſis electionibus habendi ſunt. De Problemate hoc ſenſu accepto nihil definitum invenio apud Auctores; ego quæſitum ſequenti modo exploro: Sunto ex. gr. combinandæ & permutandæ modis omnibus literæ a, b, c, eâ lege, ut in nullâ combinatione a ſæpiùs quàm quater, b quam ter, & c quàm bis occurrat, hoc eſt, ut aliter enunciem, ſint combinandæ & permutandæ omnifariam literæ $aaaabbbcc$ ſeu $a^4 b^3 c^2$, quarum 4 ſunt eædem, item tres aliæ, & rurſum duæ aliæ eædem, ſitque determinandus numerus harum combinationum, tam ſecundùm ſingulos quàm ſecundùm omnes exponentes. Conſtat, ante omnia electiones ſolius a^4, incluſo nullione quem unitatis notâ deſignamus, eſſe has quinque: 1, a, aa, a^3, a^4. Singulis harum applicetur litera b, primò ſemel, dein bis, tertiò ter, ut fiant novæ electiones: b, ab, aab, a^3b, a^4b: nec non, bb, abb, $aabb$, a^3bb, a^4bb: ut & b^3, ab^3, aab^3, a^3b^3, a^4b^3, planè ut factum cap. 6. Sed harum electionum illæ, quas b ſemel ingreditur, per reg. 2, cap. 1 ordine inſuper recipiunt permutationes 1, 2, 3, 4, 5; prima vid. unam b, ſecunda duas ab & ba, tertia tres aab, aba, baa &c. Illæ verò, quas b ingreditur bis, ordine permutationes admittunt 1, 3, 6, 10, 15, juxta numeros ſcil. trigonales; prima nempe unam bb; ſecunda tres, abb, bab, bba; tertia ſex, $aabb$, $abab$, $abba$, $baab$, $baba$, $bbaa$. &c. Et illæ, in quibus b ter occurrit, permutationes ordine capiunt 1, 4, 10, 20, 35, juxta numeros pyramidales: quemadmodùm etiam illæ, ſi quæ darentur electiones, in quibus b ſæpiùs adhuc recurrit, permutationes admitterent juxta alios & alios figuratos gradatim altiores in infinitum. Hoc peracto, ſingulis præcedentium electionum permutationibus 1; a, b; aa, ab, ba, bb; a^3, aab, aba, baa, abb, bab, bba, b^3; &c. tertia porrò litera c nunc ſemel nunc bis adjungi intelligatur; ita novæ prodibunt electiones, c; ac, bc; aac, abc, bac, bbc; a^3c &c.

nec non, *cc*; *acc*, *bcc*; *aacc*, *abcc*, *bacc*, *bbcc*; a^3cc &c. quarum priores, quæ literam *c* ſemel tantùm includunt, reſpectu hujuſce literæ, ordine reliquarum non immutato, ſubeunt permutationes 1, 2, 3; 4, &c. juxta numeros naturales; nempe unio *c* unam, ſinguli binionum *ac*, *bc* duas; ſinguli ternionum *aac*, *abc*, *bac*, *bbc* tres, & ita porrò: poſteriores verò, quæ lit. *c* bis continent, permutationes ordine patiuntur 1, 3, 6, 10 &c. ſecundùm trigonales; binio nempe *cc* unam, ternionum *acc*, *bcc* ſinguli tres; quaternionum *aacc*, *abcc*, *bacc*, *bbcc* ſinguli ſex, & ita conſequenter. Dico, ordine reliquarum præter *c* literarum non immutato; aliàs enim ex. gr. *abcc* non 6, ſed 12 permutationes admittit, at quarum dimidia pars redundat, utpote ſequenti quaternioni *bacc* attribuenda. Quòd ſi jam quarta adeſſet litera, ea ſimiliter omnibus præcedentibus permutationibus ſecundùm ſingulas ſuas dimenſiones foret applicanda, ad formandum novas electiones, quæ denuò permutationes reciperent ſecundùm numeros vel laterales, vel trigonales, vel pyramidales, &c. prout accedens litera vel ſemel, vel bis, vel ter iis adjuncta eſſet. Quo pacto nulla optatarum combinationum nos fugiet, neque etiam ulla bis computabitur. Ex dictis verò facilè perſpicitur ratio conſtructionis ſequentis Tabellæ, quâ numerum talium combinationum ſecundùm exponentes tam ſingulos quàm univerſos expeditè definio. Scribo ordine omnes exponentes combinationum, quas propoſitæ res $a^4b^3c^2$ ſuſcipere poſſunt, à 0 uſque ad 9; & ſub eorum primis colloco tot unitates, quot prima litera habet dimenſiones, & unam ampliùs, nempe quinque; quibus ſtatim ſubjungo quinque numeros laterales 1, 2, 3, 4, 5; & his totidem trigonales 1, 3, 6, 10, 15, totidemque pyramidales 1, 4, 10, 20, 35; donec præter ſeriem unitatum tot habeam ſeries, quot altera litera *b* habet dimenſiones, easq; gradatim dextrorſum promoveo, ut factum cap. 6. Tum addo terminos, qui in eodem ſibi gradu perpendiculariter reſpondent, ut fiant numeri 1, 2, 4, 8, 15 &c. Hos confeſtim duco in totidem laterales 1, 2, 3, 4 &c. & trigonales 1, 3, 6, 10 &c. ſingulos ordine multiplicando per ſingulos, ut præter ſeriem 1, 2, 4, 8 &c. tot aliæ prodeant numerorum ſeries, 1, 4, 12, 32 &c. & 1, 6, 24, 80 &c. quot tertia litera *c* obtinet dimenſiones, quas rurſus gradatim diſpono & addo, continuaturus eodem tenore ulteriùs, ſi plures literæ ſu-

per-

pereſſent. Sic tandem ex ultimâ additione prodibunt numeri, qui multitudinem combinationum ſecundùm exponentes quiſque ſuos indicant, adeoque ſimul collecti numerum omnium ſimpliciter combinationum produnt:

Res Combinandæ.	*Exponentes Combinationum.* 0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
a^4	1	1	1	1	1					
		1	2	3	4	5				
			1	3	6	10	15			
				1	4	10	20	35		
$a^4 b^3$	1	2	4	8	15	25	35	35		
		1	4	12	32	75	150	245	280	
			1	6	24	80	225	525	980	1260
$a^4 b^3 c^2$	1	3	9	26	71	180	410	805	1260	1260

Diſcimus ex hâc Tabellâ, quòd res propoſitæ $a^4 b^3 c^2$ contineant unum nullionem, tres uniones, 9 binarios, 26 ternarios, &c. tandemque 1260 novenarios, & quòd ſumma omnium abſolutè combinationum ſit 4025. Methodo huic ex abundanti fidem conciliabit ſequens laterculus, in quo primò adſcriptas vides omnes 60 rerum datarum electiones juxta hypotheſin capitis 6ti, & dein ad latus notatos numeros permutationum ſingulis competentes per regulam 2, capitis primi:

Elect.

Elect.	Permut.	
0	1 —	1
a	1	
b	1	3
c	1	
aa	1	
ab	2	
ac	2	
bb	1	9
bc	2	
cc	1	
a^3	1	
aab	3	
aac	3	
abb	3	
abc	6	26
acc	3	
b^3	1	
bbc	3	
bcc	3	

Elect.	Permut.	
a^4	1	
a^3b	4	
a^3c	4	
$aabb$	6	
$aabc$	12	
$aacc$	6	71
ab^3	4	
$abbc$	12	
$abcc$	12	
b^3c	4	
$bbcc$	6	
a^4b	5	
a^4c	5	
a^3bb	10	
a^3bc	20	
a^3cc	10	
aab^3	10	180
$aabbc$	30	
$aabcc$	30	
ab^3c	20	
$abbcc$	30	
b^3cc	10	

Elect.	Permut.	
a^4bb	15	
a^4bc	30	
a^4cc	15	
a^3b^3	20	
a^3bbc	60	410
a^3bcc	60	
aab^3c	60	
$aabbcc$	90	
ab^3cc	60	
a^4b^3	35	
a^4bbc	105	
a^4bcc	105	805
a^3b^3c	140	
a^3bbcc	210	
aab^3cc	210	
a^4b^3c	280	
a^4bbcc	420	1260
a^3b^3cc	560	
a^4b^3cc	1260 -	1260
Summa Permut.		4025

Colligitur hinc, quòd ex tribus diverſis notis numeralibus (non computato nullione, quo nulla earum accipitur) formari poſſunt 4024 diverſi numeri, in quorum nullo una notarum ſæpiùs quàm quater, altera quàm ter, & tertia quàm bis repetatur. Semper autem omnes notæ, quoties poſſunt, ſimul ſumtæ, hoc eſt, combinatæ ſecundùm exponentium maximum tot numeros ſuppeditant, quot numeros eædem exhibent combinatæ ſecundùm exponentem proximè minorem; quod Theorema notatu dignum.

Hæc ſunt, quæ de *Arte Combinatoriâ* dicere in præſens ſuſcepimus. Potuiſſemus quidem poſtremis hiſce capitibus, ubi in combinatio-

binationibus & ordo attenditur, & una eademque res eandem electionem ſæpiùs ingredi poſſe concipitur, varias iterum quæſtiones nobis enodandas proponere, & inquirere, in quot combinationibus una pluresvé res conjunctione vel diviſim reperiantur, uti factum cap. 4to; aut, quot combinationes aliqua res ſemel, bis, ter, quater &c. poſita ingrediatur; aut, quot ſint illarum combinationum, in quibus nulla rerum datarum plus unâ, duabus, tribus &c. vicibus occurrit; aut in quibus deſignata quæpiam res primum, ſecundum, tertium &c. locum occupat, aliisve circumſtantiis veſtita apparet. Sed quia quæſtiones ejuſmodi in infinitum multiplicari poſſunt, maluımus eas omnes hîc ſicco pede præterire, & ſi quas earum deinceps ex uſu noſtro fore videbimus, earundem applicationem & enodationem in reliquas partes reſervare, quàm ad particularia nonnulla hîc loci deſcendendo opus nunquam perficiendum aggredi. Hîc itaque ſecundæ Parti limites figimus, mox tranſituri ad cætera inſtituti noſtri capita; uſumque prolixum doctrinæ hujus de Combinationibus in Arte Conjectandi per plurima varii generis Problemata liquido oſtenſuri.

ARTIS CONJECTANDI
PARS TERTIA,
explicans
Uſum præcedentis Doctrinæ in variis Sortitionibus & Ludis aleæ.

Abſolutâ in præcedente parte Operis, Permutationum & Combinationum Doctrinâ, ordo jubet, ut ejus Uſum ampliſſimum in definiendis Expectationibus Aleatorum per varias Sortitiones & Ludos aleæ hâc parte explicemus. Fundamentum generale hujus indaginis in eo conſiſtit, ut omnes permutationes vel combinationes quarum ſubjecta materia capax eſt, pro totidem habeantur caſibus æquè poſſibilibus, & ut diligenter attendatur, quot horum caſuum huic illive colluſori faveant vel adverſentur, è quo dein cætera per doctrinam primæ partis abſolvuntur. Cùm verò ſpecialis fundamenti applicatio non levem ſæpè induſtriam requirat, & exemplis meliùs quàm præceptis addiſcatur, nolo Lectorem prolixioribus prolegomenis detinere, ſed abſque morâ ad ipſam enodationem ſequentium Proble-

matum

matum tranſeo, quæ nullo ferè habito ſelectu, prout in adverſariis reperi, proponam, præmiſſis etiam vel interſperſis nonnullis facilioribus, & in quibus nullus combinationum uſus apparet.

PROBLEMA. I.

Quidam duobus calculis albo nigroq; in urnâ reconditis præmium proponit tribus A, B, C, eâ lege, ut qui album extraxerit, præmio potiatur; ſi ſecùs omnes ſaxint, præmio quoq; careant. Primus autem extrahet ipſe A, & reponet; ſecundus B, tertius C. Quæruntur ſingulorum ſortes?

Liquet, hunc caſum tantùm ſpecialem eſſe Problematis generalioris occaſione Propoſ. XI. part. 1. pag. 34. ſoluti, quo plurium Aleatorum ſortes exploravimus, qui æquali an inæquali, ſortitionum à ſingulis continuò inſtituendarum numero aliquid præſtare ſuſceperunt; ubi ſortem cujuslibet hâc generali formulâ expreſſimus: $\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}$. Itaque cùm in præſenti exemplo ſit. a (numerus omnium caſuum) ob duos tantùm calculos valeat 2; c (numerus eorum, quibus præſcriptum non impletur) ob unicum nigrum valeat 1; n ob unicam ſortitionem à ſingulis inſtituendam itidem 1; s verò (numerus omnium ſortitionum hanc præcedentium) pro primo A valeat 0, pro ſecundo B 1, pro tertio C 2; fiet (ſubſtitutis iſtis literarum valoribus) ſors primi A $\frac{1}{2}$, ſecuudi B $\frac{1}{4}$, tertii C $\frac{1}{8}$; ſic ut ipſi quoq; aleam proponenti relinquatur $\frac{1}{8}$ ſui præmii.

PROBLEMA II.

Cæteris poſitis, ut prius, ſi aleæ Brabeuta omni jure in præmium ſe abdicare volens, jubeat reliquos tripartiri præmium inter ſe, ſi nullus eorum album calculum elegerit: Quæruntur tum eorum ſortes?

Quia ſic omne jus præmii in ſolidum tranſit in tres reliquos, perſpicuum eſt, uniuscujusque expectationem meliorari $\frac{1}{24}$, hoc eſt, triente ejus, quod juxta præced. hypoth. ſoli Brabeutæ conveniſſet. Quocirca addito $\frac{1}{24}$ ſeorſim ad $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, & $\frac{1}{8}$, habetur expectatio primi $\frac{13}{24}$, ſecundi $\frac{7}{24}$, & tertii $\frac{4}{24}$.

PROBLEMA III.

Sex, A, B, C, D, E, F, juſſu Principis, qui poſtremis magis favet quàm primis, aleâ periclitantur: primi duo A & B ſeorſim ſortiri incipient; uter eorum vicerit, ſortietur cum tertio C, uter horum ſuperior evaſerit, certabit cum D; & ſic porrò usq; ad ultimum F; præmiumq́; reportabit, qui poſt ultimum congreſſum victor ſupererit. Supponitur autem, binos quoscunq; æquâ ſorte inter ſe certare, hoc eſt, neutrum altero potiorem ad vincendum expectationem habere. Quæruntur ipſorum ſortes?

Primus A præmio potiri nequit, niſi omnium reliquorum quinque victor evadat, hoc eſt, niſi quinquies continuò vincat; uti & ſecundus B: ſed nec tertius C palmam reportabit, niſi alterutrum præcedentium A & B, & omnes tres ſequentes ſuperet, hoc eſt, niſi quater continuò vincat, nec 4tus D, niſi cum uno trium præcedentium ambos ſequentes, hoc eſt, niſi ter continuò vincat, & ſimiliter de reliquis. Unde conſtat, Problema hoc pro caſu ſpeciali habendum eſſe ejus, quo quæruntur expectationes colluſorum, qui aliquot ſortitionibus quidpiam aliquoties præſtare ſuſcipiunt; cujus ſolutionem ad Propoſ. XII part. 1. pag. 38. tradidi, Tabellâ in eum uſum ſupputatâ, juxta quam primi vel ſecundi ſors erit $\frac{b5}{a5}$, tertii $\frac{b4}{a4}$, quarti $\frac{b3}{a3}$, quinti $\frac{bb}{aa}$, & ſexti $\frac{b}{a}$, hoc eſt, (quia *a* ad *b* habet rationem duplam ob æqualem in quâvis ſortitione numerum caſuum ad vincendum & perdendum) ſors primi vel ſecundi $\frac{1}{32}$, tertii $\frac{1}{16}$, quarti $\frac{1}{8}$, quinti $\frac{1}{4}$, & ſexti $\frac{1}{2}$. Unde patet, exceptis duobus primis, qui æquali expectatione gaudent, quemlibet reliquorum proximè præcedenti duplo potiorem ſortem nanciſci; omnium verò expectationes exhaurire integrum præmium.

PROBLEMA IV.

Cæteris poſitis, ut priùs, ſi fingamus non æquam obtinere ſortem in quâvis aleâ, ſed unumquemq; cum ſecundo à ſe congredientem duplò, cum tertio 4plò, cum quarto 8plò &c. plures ad vincendum quàm perdendum caſûs habere, exceptis tantùm duobus primis, quos æquo Marte certare ponimus: quæritur, an ſic omnes ſex æquale jus acquirant in

præmium propoſitum, compenſatis per duplam proportionem caſuum ſubduplis expectationibus præcedentis propoſitionis?

Hîc ob diverſitatem ſortium, quæ in diverſis aleis regnat, calculus paulò intricatior: Conſulatur Regula ad calcem Propoſ. XII part. I. pag. 44. & formula, quam ſuggerit, $\frac{beh\,\&c.}{adg\,\&c.}$ ubi literæ *beh* &c. numeros caſuum ad vincendum, & *adg* &c. numeros omnium caſuum in ſucceſſivis aleis ſignificant; exprimitur enim hâc formulâ expectatio aleatoris alicujus: qui aliquoties continuè vincere tenetur, quantumvis in diverſis aleis non idem maneat caſuum numerus, quibus vincat; uti in præced. Problemate. Patet autem, quantitatem hanc $\frac{beh\,\&c.}{adg\,\&c.} \infty \frac{b}{a}\cdot\frac{e}{d}\cdot\frac{h}{g}$ &c. hoc eſt, expectationem totalem, ſeu ſpem vincendi omnes aleas, multiplicatione conflatam eſſe ex ſortibus particularibus, quas habet ad vincendum ſingulas. Conf. Coroll. I. Prop. 3 part. I. Quapropter ut Problematis noſtri ſolutio methodica habeatur, inveſtigandum ſucceſſivè, quænam juxta hanc formulam primi A ſit futura ſors, ſi primò unum B, dein ſi duos B & C, hinc ſi tres, quatuor, ac denique omnes quinque reliquos vincere ſuſcipiat; id enim omne prærequiritur ad indagandum ſortes cæterorum. Eſt verò ſors ipſius, cùm ſolum B vincere ſuſcipit, $\frac{1}{2}$; cùm duos B & C vincere contendit, $\frac{1.2}{2.3} \infty \frac{1}{3}$; cùm tres B, C & D, $\frac{1.2.4}{2.3.5} \infty \frac{4}{15}$, &c. ut ex appoſito laterculo apparet. Quod idem intelligendum de ſecundo B. Quod ſpectat tertium C, is cum alterutro præcedentium (quem in laterculis lit. P indigitamus) congredi tenebitur; utrumvis autem contingat, habet $\frac{1}{3}$ expectationis ad illum vincendum: quare ſi præter illum etiam ſequentem D vincere ſuſcipiat, habebit $\frac{1.2}{3.3} \infty \frac{2}{9}$; ſi verò & ipſum E, $\frac{1.2.4}{1.3.5} \infty \frac{8}{45}$. Similiter quarto D cum uno præcedentium P congrediendum erit: ſi cum C congrediatur, habet $\frac{1}{3}$ ad illum vincendum: ſi cum A vel B, habet $\frac{1}{5}$; ſed æquè facile contingit, ut cum A vel B vel C congredi teneatur, quandoquidem omnes tres eandem habent expectationem ad

vin-

Sors ipſius ad vincendum	A	B
	B $\infty \frac{1}{2}$	A $\infty \frac{1}{2}$
	B, C $\infty \frac{1.2}{2.3} \infty \frac{1}{3}$	A, C $\infty \frac{1.2}{2.3} \infty \frac{1}{3}$
	B, C, D $\infty \frac{1.2.4}{2.3.5} \infty \frac{4}{15}$	A, C, D $\infty \frac{1.2.4}{2.3.5} \infty \frac{4}{15}$
	B, C, D, E $\infty \frac{1.2.4.8}{2.3.5.9} \infty \frac{32}{135}$	A, C, D, E $\infty \frac{1.2.4.8}{2.3.5.9} \infty \frac{32}{135}$
	B, C, D, E, F $\infty \frac{1.2.4.8.16}{2.3.5.9.17} \infty \frac{512}{2295}$	A, C, D, E, F $\infty \frac{1.2.4.4.16}{2.3.5.9.17} \infty \frac{512}{2295}$

Sors ipſius ad vincendum	C	D
	P $\infty \frac{1}{3}$	P $\infty \frac{11}{45}$
	P, D $\infty \frac{1.2}{3.3} \infty \frac{2}{9}$	P, E $\infty \frac{11.2}{45.3} \infty \frac{22}{135}$
	P, D, E $\infty \frac{1.2.4}{3.3.5} \infty \frac{8}{45}$	P, E, F $\frac{11.2.4}{45.3.5} \infty \frac{88}{675}$
	P, D, E, F $\infty \frac{1.2.4.8}{3.3.5.9} \infty \frac{64}{405}$	

Sors ipſius ad vincendum	E	F
	P $\infty \frac{5}{27}$	P $\infty \frac{181}{1275}$
	P, F $\infty \frac{5.2}{27.3} \infty \frac{10}{81}$	

vincendum continuè, quouſque ordo certandi quartum D tangit; ſinguli nempe $\frac{1}{3}$, ut ex Tabulâ liquet: quocirca ipſe D per Prop. 3. part. 1. habet $\frac{1.^{1:3} + 2.^{1:5}}{3} \infty \frac{11}{45}$ ad vincendum indefinitè unum trium præcedentium, quem ipſi ſors objecerit; ideoque ſi præterea & quintum E vincere conetur, habere cenſebitur $\frac{11.2}{45.3} \infty \frac{22}{135}$ &c. Non ſecus quinti E & ſexti F ſortes explorantur, niſi quòd ipſos non æquè facilè cum unoquovis ex præcedentibus congredi contingit. Nam ex. gr. primus A habet $\frac{4}{15}$ ad vincendum continuè ipſos B, C, D,

juxta

juxta laterculum, tantundemque ſecundus B ad vincendum A, C, D, & tertius C habet $\frac{2}{9}$ ad vincendum P & D, & quartus D $\frac{11}{45}$ ad vincendum P, hoc eſt, reductis ad commune nomen fractionibus, A & B habent $\frac{12}{45}$, C $\frac{12}{45}$, & D $\frac{11}{45}$ ad vincendum continuè, quouſque ordo certandi quintum E poſtulat: quapropter 12 ſunt caſus, quibus ipſe E cum primo A, totidem quibus cum ſecundo B, 10 quibus cum tertio C, & 11 quibus cum 4to D committitur; unde per Prop. 3 part. 1 habet $\frac{24 . {}^{1:9} + 10 . {}^{1:5} + 11 . {}^{1:3}}{45} \infty \frac{5}{27}$ expectationis ad vincendum indefinitè adverſarium, quem ipſi fors ex præcedentibus obtulerit. Et ſic in cæteris: Quòd ſi ubique ritè operatus fueris, deprehendes, expectationes totales aleatorum ſeu ſpes adimplendi omnes conditiones certaminis & reportandi præmium exprimi poſtremis laterculorum fractionibus $\frac{512}{2295}$, $\frac{512}{2295}$, $\frac{64}{405}$, $\frac{88}{675}$, $\frac{10}{81}$, $\frac{181}{1275}$, quæ ad idem nomen 34425 reductæ monſtrant, illas valdè diverſas eſſe & ſe habere ut 7680, 7680, 5440, 4488, 4250, 4887; & quia præcisè unum integrum exhauriunt, eo ipſo probitatem methodi & calculi confirmant.

PROBLEMA V.

A certat cum B, quòd ipſe ex 40 chartis luſoriis, id eſt, 10 cujusq; ſpeciei, 4 chartas extracturus ſit, ita ut ex unaquaq; ſpecie habeat unam. Quæritur ratio ſortium?

Problematis hujus in Appendice Problematum Hugenianorum ordine tertii ſolutionem jam parte primâ exhibuimus: nunc oſtendemus, quo pacto idem aliter, in auxilium vocatâ Combinationum doctrinâ confici poſſit.

Hunc in finem quæratur, quoties ex 40 chartis luſoriis quaternæ poſſint accipi, hoc eſt, quæratur numerus quaternionum in rebus 40. Inveniuntur autem per Cap. IV. part. 2. quaterniones iſti

iſti $\frac{40.39.38.37}{1.2.3.4}$ ∞ 91390, habendis pro totidem aleæ caſibus, qui omnes æquè facile evenire poſſunt. At horum caſuum ſunt 10000, qui Problematis conditionem implent, faciuntque ut ex unaquaque chartarum ſpecie habeatur una, quod ſic oſtendi poteſt:

Pono pro 4 ſpeciebus chartarum 4 teſſeras, & pro 10 chartis cujuſque ſpeciei decem facies ſeu hedras in quaque teſſera: ſic totidem erunt diverſi jactus in his teſſeris, quot chartarum ſunt quaterniones præſcriptam conditionem adimplentes; ſicut enim ad hanc implendam ex quavis ſpecie neceſſariò una requiritur charta & non niſi una, ita in quovis teſſerarum jactu ſingulæ teſſeræ neceſſariò unam & non niſi unam faciem ſupernè oſtentant. Sed ex iis quæ Hugenius ad Prop. X. part. 1. præfatur, colligi poteſt, quòd in 4 ejuſmodi teſſeris reperientur jactus 10.10.10.10. ∞ 10000; cùm ergò totidem ſint chartarum electiones ipſi A faventes, cæteræque 81390 contra certanti proſint, ſequitur ſortem A ad ſortem B eſſe ut 10000 ad 81390, ſeu ut 1000 ad 8139.

PROBLEMA VI.

Aſſumtis 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus ſit, inter quos tres albi erunt. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B?

Problema hoc, quod in Appendice Problematum Hugenianorum eſt ordine quartum, in hanc Partem rejicere coacti fuimus, propterea quòd ejus ſolutio aliter quàm combinationum ope, quarum Doctrina ſecundâ demum Parte tradenda erat, difficulter inveſtigari potuiſſet.

Conſtat primò, tot eſſe in univerſum aleæ propoſitæ caſus, quoties ex 12 calculis ſepteni poſſunt eligi, nempe $\frac{12.11.10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5.6.7}$ ∞ 792.

∞ 792, per Cap. IV. part. 2. Deinde conſiderandum eſt, ſi quis quærat, quot horum caſuum ipſi A faveant vel adverſentur, hoc tantundem eſſe, acſi quærat, in quot ſeptenariis ex deſignatis quatuor calculis tres qualeſcunque excluſo quarto reperiantur; cujus Problematis ſolutionem ſub finem dicti capitis ante appendicem hâc generali formâ expreſſimus $\frac{m . m-1 . m-2 \ldots m-b+1}{1 . 2 . 3 \ldots b}$ in $\frac{n-m . n-m-1 . n-m-2 \ldots n-m-c+b+1}{1 . 2 . 3 . 4 \ldots c-b}$, ſignificante literâ *n* numerum rerum combinandarum, *c* exponentem combinationis, *m* numerum rerum deſignatarum, *b* illarum ex deſignatis quæ combinationes optatas junctim ingredi debent: quare ſi interpreteris *n* per 12, *c* per 7, *m* per 4, & *b* per 3, habebis $\frac{4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3}$ in $\frac{8 . 7 . 6 . 5}{1 . 2 . 3 . 4}$ ∞ 4 . 70 ∞ 280, numerum omnium ſeptenariorum, quos ſingulos tres albi calculi excluſo quarto ingrediuntur. Tot ergò caſibus vincet A, reliquis 512 ipſi B profuturis, adeò ut ſors illius ſit ad ſortem hujus, ut 280 ad 512, ſive ut 35 ad 64; intellige ſi præciſè tres albos calculos nec plures nec pauciores eximere ſuſceperit. Nam ſi tres albi eximendi de tribus *ad minimum* intelligantur, ita ut ſenſus Problematis ſit, etiam tum lucraturum ipſum A, ſi plures tribus, h. e. omnes 4 albos elegerit, tum perſpicuum eſt, numerum caſuum quibus vincit A augendum eſſe toto illo electionum numero, quas omnes 4 albi calculi ingrediuntur; qui numerus per eandem regulam, poſitis tantùm *m* & *b* æqualibus ſeu verſo valore ipſius *b* in 4, invenitur $\frac{8 . 7 . 6}{1 . 2 . 3}$ ∞ 56, cui additus præcedens 280 efficit 336, numerum electionum ipſi A faventium; & relinquuntur ipſi B duntaxat 456, ſic ut eo caſu ſortes ipſorum ſint ut 336 & 456, ſeu ut 14 & 19.

PROBLEMA VII.

Colluſores aliquot A, B, C, &c. ex manipulo chartarum luſoriarum, quarum una icone

ne

ne ſignata eſt, reliqua iconiſmis vacua (cartes blanches *) folia ordine & alternatim eximunt, eâ conditione, ut qui ſignatum exemerit vincat. Tollet autem A primum, B ſecundum, C tertium, & ſic uſq; ad ultimum, poſt quem primus A tollere perget ſequens folium, atq; ita porrò uſque ad finem ludi. Quæritur ratio ſortium?*

Patet, tot eſſe caſus æquè faciles quot folia; cum folium iconiſmo ſignatum æquè facile vel primum, vel ſecundum vel tertium, vel deniq; ultimum locum obtinere poſſit: unde tot caſus quiſque habet ad vincendum quot ipſi folia contingunt; ac per conſequens

Si omnibus colluſoribus æqualis foliorum numerus contingit, quod fit cùm numerus colluſorum eſt pars aliquota numeri chartarum, ſeu hic per illum exactè dividi poteſt, æqualis quoque omnium ſors erit: Ita ſi numerus colluſorum ſit a, chartarum ma, unicuique obtingent m chartæ, quæ ſortem illi pariunt $\frac{m}{ma}$ ∞ $\frac{1}{a}$, ſic ut tum ordo eligendi nulli colluſorum præjudicet.

Si verò non omnibus æqualis foliorum numerus obtingit, quod accidit ubi numerus chartarum per numerum colluſorum exactè dividi nequit, putà ſi numero colluſorum exiſtente a, chartarum numerus eſt ma ∞ b (poſito $b < a$) neque etiam ſortes omnium æquales erunt. Tum enim unicuique primorum b colluſorum cedent chartæ $m+1$, unicuique autem reliquorum tantùm m: ac proinde ſors unius ex illis erit ad ſortem unius ex his, ut $m+1$ ad m: Ex. gr. poſito colluſorum numero 10 & chartarum 64 ſeu 6 in 10 + 4; ſors unius ex primis quatuor eſt ad ſortem unius ex poſtremis ſex, ut 7 ad 6.

PROBLEMA VIII.

Cæteris poſitis, ut prius, ſi in manipulo chartarum plures iconiſmis ſignatæ exiſtant, illeque vincere cenſendus ſit, qui primam earum traxerit. Quæritur tum ratio ſortium?

Hic ſortes colluſorum non ampliùs æquales ſunt, ſed quivis præcedentium unoquovis ſequentium potiorem conditionem nanciſcitur, ſive eorum numerus numeri chartarum pars aliquota ſit ſeu ſecus, ob rationem, quòd ſignatarum prima, à quâ ſolâ victoria dependet, faciliùs primum locum quàm ſecundum, & hunc faciliùs quàm tertium &c. occupare poteſt. Etenim quò anteriorem iſta locum occupat, eò plura cæteris ſignatis poſt ſe loca occupanda relinquit. Ut verò determinemus numerum caſuum, quibus unumquodq; fiat, ſumamus ex. gr. chartas 12, interque illas 4 iconibus conſpicuas, nam eadem operandi methodus ubique. Tum ſi prima charta icone ſignata primum locum occupet, reliquis tribus undecim patent loca reliqua; unde terna horum qualiacunque occupando tot caſus diverſos efficiunt, quot continentur ternarii in rebus undecim, nempe $\frac{11.10.9}{1.2.3}$ ∞ 165. Pariter ſi prima ſignata charta ſecundum locum teneat, reliquæ tres ex decem locis reliquis tria qualiacunque occupabunt; quod tot diverſos caſus præbet, quot ternarii comprehenduntur in rebus decem, vid. $\frac{10.9.8}{1.2.3}$ ∞ 120. Rurſus, ſignatarum primâ tertium locum occupante, reliquis tantùm patent loca novem, unde tot caſus emergunt, quot ternarii continentur in rebus 9: & ſic ulteriùs juxta ſubjunctum laterculum, in quo prima ſeries ordinem colluſorum, ſi vis, trium A, B, C alternatim trahentium; ſecunda ſeries loca foliorum; tertia numeros caſuum, quibus primum folium ſignatum in loca reſpondentia incidere poteſt, exhibet. Hos caſus

deter-

determinant ipſiſſimi ternarii, quos ordine recipiunt res 11, 10, 9, &c. eoſdem determinarent earundem binarii, ſi 3 tantùm folia ſignata ponerentur; & unitates, ſi duo.

Ordo Colluſ..	A.	B.	C.	A.	B.	C.	A.	B.	C.	A.	B.	C.
Loca foliorum	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Num. caſuum	165.	120.	84.	56.	35.	20.	10.	4.	1.	0.	0.	0.

Omnes verò hi caſus æquè facile evenire poſſunt, & ſumma eorum æqualis numero quaternionum in rebus 12 ∞ $\frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}$ ∞ 495: quanquam enim ſinguli horum caſuum ingentem numerum aliorum caſuum ſecundariorum ſub ſe comprehendunt: (eorum ſcil. qui ex ſolâ tranſpoſitione 4 foliorum ſignatorum inter ſe, & 8 non-ſignatorum inter ſe reſultant) attamen hi caſus ſecundarii magno compendio inſuper haberi poſſunt, quòd cum ipſi æquè ſunt proclives, tum idem ipſorum numerus (ob conſtantem foliorum 4 ſignatorum & 8 non-ſignatorum numerum) uni primario reſpondet: cuique videl. primario 1.2.3.4 in 1.2.3.4.5.6.7.8 ∞ 24 in 40320 ∞ 967680 ſecundarii, per Cap. I. part. 2. Et verò æqualis numerus caſuum ſecundariorum æquè proclivium caſum æquè proclivem primarium efficit, per Cor. 2. Prop. 3. part. 1.

Quibus ita oſtenſis, ſi ſortes colluſorum deſideres, neceſſe tantùm habes addere in unam ſummam numeros caſuum, locis illis reſpondentes, in quæ quiſque colluſor incidit. Atque ſic reperitur numerus caſuum ipſi A faventium 165 + 56 + 10 ∞ 231, ipſi B 120 + 35 + 4 ∞ 159, ipſi C 84 + 20 + 1 ∞ 105; unde ratio ſortium ſit. ut 231, 159, 105, ſive ut 77, 53, 35. Notandum hoc Problema reâpſe idem eſſe cum ſecundo Appendicis Hugenianæ part. 1. nomine tantùm calculorum in folia luſoria mutato: cujus proinde ſolutio quo pacto aliter quàm ibi haberi, & ex combinationum conſideratione elici poſſit, nunc oſtendimus. Paulò intricatius eſt hoc, quod ſequitur.

PROBLEMA IX.

Cæteris poſitis, ut antea, ſi Colluſores ita paciſcantur inter ſe, ut vincat ille qui plures imagines traxerit; ſi verò duo pluresve æqualem acceperint imaginum numerum, æqualiter quoque depoſitum inter ſe partiantur, reliquis, quibus minor earum contigit numerus, nihil habentibus. Quæritur tum ratio ſortium?

Si numerus colluſorum eſt pars aliquota numeri chartarum, non opus eſt ſpeciali determinatione caſuum: ſed abſq; omni calculo conſtare poteſt, quantuscunque ſit uterque & qualiscunque etiam imaginum numerus exiſtat, ſortes omnium colluſorum inter ſe æquales eſſe debere; cùm enim iis omnibus æquè multa folia in partem cadant, & ſignatorum quodlibet ad quemlibet locum indifferenter ſe habeat, nulla ratio eſt, cur in æquali foliorum numero hic potiùs quàm ille majorem minoremve ſignatorum numerum expectet.

At ſi numerus chartarum numeri colluſorum non ſit exactè multiplex, aut etiam aliàs non æquè multa folia omnibus extrahenda concedantur, (quæ ſive alternatim ſive continuò extra hanc, perinde, cùm circumſtantia ordinis in extrahendo hìc nihil mutet) tum ſortes eorum itidem ſunt inæquales, eoq; difficiliùs reperiuntur, quo major tum colluſorum tum ſignatorum foliorum numerus exiſtit. Obſervo tamen, quòd ſi duo tantùm ſignata adſint, colluſores verò quotcunque, ſortes iſtæ ſemper ſunt futuræ ut ipſi numeri foliorum, quæ quiſq; extrahet; prorſus ut ſupra Probl. VII. in hypotheſi unius folii ſign. Ponatur enim numerus chartarum a, è quibus uni colluſorum cedant b, alii c, tertio d chartæ, & conſideretur, quòd in chartis b, quas

primus

primus obtinet, ſignatarum vel alteram, vel utraque, vel neutra reperiri poſſit. Si altera tantùm adſit, illa vel primum vel ſecundum vel tertium &c. locum in iſtis b chartis occupabit, intereà dum altera quoque promiſcuè unumquemvis reliquorum $a-b$ locorum occupare poteſt; quod proin $b.a-b$ ∞ $ab-bb$ diverſos caſus ſuppeditat. Sin ambæ ſignatæ chartas primi ingrediantur, eæ vel primum & ſecundum, primum & tertium &c. item 2dum & 3tium &c. locum obtinebunt; unde tot caſuum varietates emergunt, quot biniones in rebus b habentur, nempe $\frac{b.b-1}{1.2}$ ∞ $\frac{bb-b}{2}$: quemadmodum etiam ob eandem rationem univerſus numerus caſuum æquatur numero binionum contentorum in univerſis a chartis, videl. $\frac{a.a-1}{1.2}$ ∞ $\frac{aa-a}{2}$: intellige, neglectis iis caſibus ſecundariis, qui ex ſolâ utriusque ſignatæ inter ſe, & non-ſignatarum inter ſe permutatione oriuntur, utpote quorum numerus ob conſtantem ſignatarum & non-ſignatarum numerum perpetuò conſtans manet: quod mox infra quoque, ut & in ſequenti Problemate & ſimilibus exemplis ſemper ſubintelligendum eſt, etiamſi expreſsè non dicatur. Jam verò dictus colluſor, cùm unam ſignatam obtinuerit, ſemiſſem depoſiti ex pacto conſequetur; & cùm utramque, totum depoſitum: quaproptèr habet $ab-bb$ caſus ad $\frac{1}{2}$, $\frac{bb-b}{2}$ caſus ad 1, & cæteros, qui complent numerum $\frac{aa-a}{2}$, ad 0; id quod ei per Prop. 3. part. 1. ſortem parit $\frac{b}{a}$. Eodem modo ſors ejus, cui cedunt chartæ c, invenitur $\frac{c}{a}$; & ejus, cui d chartæ, $\frac{d}{a}$, &c. adeoque ratio ſortium, ut b, c, d, numeri ſcil. chartarum, quas ſinguli accipiunt; quod oſtendendum erat.

Extra verò hunc caſum calculus paulò moroſior evadit, & ſæpè tædii pleniſſimus, præſertim in hypotheſi ſignatarum chartarum & colluſorum paulò plurium, ubi multiplex complexionum varietas difficulter ſub regulâ generali cogi poteſt. Interim modus operandi ſemper idem, & in eo conſiſtit, ut primò exploretur, quàm variè folia ſignata inter colluſores diſtribui poſſint: hoc eſt, quot modis poſſibilibus numerus eorum diſpeſci queat in tot partes, quot ſunt

ſunt colluſores, quarumque partium nulla numerum foliorum reſpectivo colluſori cedentium ſuperet (quod eo ferè modo efficitur, quo ſupra part. 1. pag. 20. ad jactus punctorum in teſſeris inveſtigandos uſi fuimus, niſi quòd hìc ipſam quoque cyphram partibus accenſeamus; cùm utique fieri poſſit, ut unus alterve colluſorum nullum ex foliis ſignatis conſequatur): deinde ut ſupputetur, quot caſus ſingulis iſtis variationibus reſpondeant; quorum numerus initur ſumendo productum continuum combinationum ex rebus tot, quot quiſque chartas accipit, ſecundùm numerum ſignatarum iis permiſtarum ceu exponentem; veluti ſi ex chartis 40, quarum 10 ſunt ſignatæ, unus colluſorum eximere debeat 16, alius 10, tertius 8, & quartus 6; quæraturque quot caſibus contingere poſſit, ut ſimul inter chartas primi reperiantur ſignatæ 4, ſecundi 3, tertii 3, & quarti 0; multiplico numerum quaternionum in rebus 16, ternionum in 10, ternionum in 8, & nullionum in 6, in ſe invicem, & productum $\frac{16.15.14.13}{1.2.3.4}$ in $\frac{10.9.8}{1.2.3}$ in $\frac{8.7.6}{1.2.3}$ in $1 \infty 1820.120.56.1 \infty 12230400$ quæſito ſatisfaciet; uti ex ſupra oſtenſis colligere facile eſt.

Quoniam autem in integri Problematis enodatione calculo nonnunquam contractiore uti licet, non abs re erit, rem totam ſpeciali aliquo exemplo declarare: Sunto chartæ 20 (quarum 10 ſignatæ) alternatim diſtribuendæ inter colluſores tres A, B, C, ſic ut primus conſequatur chartas 7, alter 7, & tertius tantùm 6; quæranturque eorum expectationes. Liquet primò, fieri poſſe, ut in 7 chartis primi colluſoris vel nulla, vel una, vel duæ, 3, 4, 5, 6, vel denique 7 ſignatæ reperiantur; & ſi tantùm una vel 2 vel 3 ſignatæ adſint, eum infallibiliter perditurum; quandoquidem reliquorum alteruter neceſſariò plures tribus acquiret, & ſic ex pacto vincet: quare numerum horum caſuum inire ſuperſedeo, & ſtatim ſuppono, ipſi A 4 ſignatas obtingere; quo pacto uni reliquorum cedere poſſunt vel ſex ſignatæ reliquæ, vel 5, vel pauciores: ſed quoniam quatenus ei 5 vel 6 cedunt, eatenus perdere facient colluſorem A; idcirco & hos caſus ceu inutiles prætereo, & mox tranſeo ad ſignatas 4 & 3, tribuendo ipſi B 4 & C 2, vel B 2 & C 4, vel denique utrique 3. (quarum hypotheſium duæ priores colluſorem A ex ſemiſſe, tertia ex aſſe depo-

ſiti poſſeſſorem reddunt) atque per doctrinam præced. reperio, caſus eſſe 18375 qui colluſoribus A, B, C, ſignatas 4, 4, 2: caſus 11025, qui iis 4, 2, 4 & caſus 24500, qui 4, 3, 3, ſignatas advehunt. Deinde fingo colluſori A obtingere ſignatas 5, ſic reliquas 5 vel ſolus B vel ſolus C habebit; vel partem earum hic, partem ille accipiet: atq; idcirco 21 numerum quinionum in rebus 7, duco tùm in 21 numerum totidem quinionum in aliis rebus 7, tum in 6 numerum quinionum in rebus 6, ad habendum caſus 441 + 126 ∞ 567, qui ſinguli colluſori A 5 ſignatas & alterutri reliquorum 5 reliquas afferunt, adeoque ipſi A ſemiſſem depoſiti lucrantur. Haud ſecùs etiam ſupputantur caſus, quibus fieri poteſt, ut dum A 5 ſignatas obtinet, reliquorum uni obtingant 4 & alteri 1, vel uni 3 & alteri 2; ſed non opus eſt iſthuc deſcendere; poſſum enim colluſores B & C ſumere pro uno eodemque, & quæſitum abſque diſtinctione caſuum breviùs obtinere, ſi à 1287 numero quinionum in chartis 13, quas ſimul ambo reliqui conſequuntur, ſubducantur præcedentes 21 + 6 ∞ 27 caſus, quibus omnes 5 ſignatæ eorum alterutri obtingunt; ac reſiduum 1260 ducatur in 21 numerum quinionum in 7 chartis primi: ſic enim prodeunt caſus 26460, qui ſinguli colluſori A integrum depoſitum acquirunt. Tandem etiam pono colluſori A evenire ſignatas 6 vel 7, & quia nunc ultrà ſignatarum ſemiſſem habet, video illum neceſſariò victorem evaſurum, quomodocunque cæteræ 4 aut 3 ſignatæ inter colluſores B & C diſtribuantur; quare neglecta & hìc ſpecialiore partitione, ipſisque B & C pro uno eodemque colluſore habitis, ſumo ex 13 eorum foliis omnes promiſcuè quaterniones & terniones, eorumque numerum per numerum ſenariorum & ſeptenariorum in 7 chartis primi comprehenſorum ſigillatim multiplico, ut fiant 5005 + 286 ∞ 5291 novi caſus, qui colluſorem A totius depoſiti dominum faciunt, prout ex appoſito laterculo apparet:

Charta

	A	B	C	*Caſus*	*ad*
Charta univerſa	7	7	6		
ſignata	4	4	2	18375	$\frac{1}{2}$
	4	2	4	11025	$\frac{1}{2}$
	4	3	3	24500	1
	5	5	—	441	$\frac{1}{2}$
	5	—	5	126	$\frac{1}{2}$
	5	5		26460	1
	6	4		5005	1
	7	3		286	1

His peractis numeros caſuum, quibus colluſor A integro depoſito potitur, in unam ſummam conjicio; nec non illos, quibus dimidium depoſiti acquirit, in aliam ſummam addo; tandemque etiam numerum omnium abſolutè caſuum, quos 10 ſignatæ in chartis 20 formare poſſunt, inquiro, qui eſt 184756: & ſic reperio, illum habere 56251 caſus ad 1, 29967 ad $\frac{1}{2}$, & reliquos ad 0; quod expectationem ipſi parit $\frac{142469}{369512}$; Et quia ſecundus B ex manipulo chartarum totidem, quot primus A nanciſcitur, habebit & ipſe $\frac{142469}{369512}$; unde tertio C relinquitur $\frac{84574}{369512}$, quæ portio etiam ab initio eodem modo computari potuiſſet. Erit igitur ſors alterutrius ex duobus primis ad ſortem tertii, ut 142469 ad 84574, major multò quàm 7 ad 6, qui ſunt numeri foliorum quæ ſingulis ex manipulo debentur.

PROBLEMA X.

Quatuor Colluſores A, B, C, D, eodem pacto quo in præced. inter ſe inito, ludunt 36 foliis, quorum 16 iconiſmis ſignata ſunt, atque ſingulis ſingula folia ordine atque alternatim diſtribuunt. Accidit autem, ut diſtributis jam 23 foliis, ipſi A in ſortem ceſſerint 4 imagines, ipſi B 3, C 2 & D 1, ſic ut reſidua ſint 13 folia, interque illa 6 ſignata. Quartus D (quem nunc ordo tangeret proximum acci-

piendi

piendi folium) videns ſibi omnem ferè vincendi ſpem evanuiſſe, alteri cuidam jus ſuum vendere vult. Quæritur, quanti? & quæ ſingulorum expectationes?

Problema non differt à præcedenti, niſi quòd colluſores jam aliquouſque luſum proſecuti ſupponuntur. Quoniam reſidua ponimus 13 chartarum folia, quorum primum ipſi D deſtinatum, ſequens ipſi A, tertium ipſi B, atque ita ordine ad ultimum uſque, quod rurſus ipſi D continget, ſequitur, ipſum D 4 folia ex illis 13 accepturum, ſingulos verò reliquorum tria; adeoque D non plura ſignata quàm 4, nec ſingulos reliquorum plura quàm 3 (ultra illa quæ jam habere ſupponuntur) conſequi poſſe. Quo obſervato diſpiciendum, quot diverſis modis reſidua 6 folia ſignata inter colluſores diſtribui poſſint, ſic ut ipſi D nunquam plura quàm 4, nec ſingulis reliqorum plura quàm tria obtingant: ac deinde ſupputandum, quot rurſum caſibus ſingulæ hæ mutationes ſint obnoxiæ; prout hæc omnia in col. 1 ſubjunctæ tabellæ exhibentur. Fit autem operatio prorſus ut in præced. Probl. ut non opus ſit ejus explicationi fuſiùs inhærere. Solum hoc attendendum, quòd ſupputatis caſibus, priuſquam conſtare poſſit, quinam huic illive colluſori faveant, numeri ſignatarum chartarum augendi ſint illis ſignatis, quas ſinguli colluſores (antequam D ſortem ſuam vendidiſſet) habuerant; (quandoquidem ab utriſque conjunctim victoria dependet;) numerus ſcil. ſignatarum ipſius D augendus unitate, ipſius A quaternario, B ternario, & C binario; uti videre eſt in col. 2 tabellæ loco prioris ſurrogandâ. Tum verò colligendi ſunt in unam ſummam omnes caſus, quibus ſinguli colluſores vel totum depoſitum, vel dimidiam, aut 3 aut 4tam partem depoſiti auferunt, vel quibus omninò nihil impetrant: quo pacto invenietur A habere 1035 caſus ad obtinendum 1, 399 caſus ad $\frac{1}{2}$ &c. (ut ſeorſim in adjuncto tabellæ laterculo notatum cernis,) qui omnes collecti faciunt 1716, (quantus quoque præcisè eſt ſenariorum numerus in chartis 13.) Quocirca fiet ſors ipſius A ∞

$\frac{1035 . 1 + 399 . 1:2 + 9 . 1:3 + 36 . 1:4 + 138 . 0}{1716}$ ꝏ $\frac{2493}{3432}$: & ſimiliter ipſius B ꝏ $\frac{742}{3432}$; ipſius C ꝏ $\frac{134}{3432}$; ac tandem ipſius D ꝏ $\frac{63}{3432}$; ſic ut ratio ſortium ſit, ut 2493, 742, 134, 63.

Notandum, quòd ſi chartæ reſiduæ non fuiſſent tam paucæ, neque numeri caſuum inventu adeò faciles, operæ pretium fuiſſet, eodem quo in præced. Probl. compendio uti; præſertim si unius tantùm colluſoris D quærenda expectatio fuiſſet: tum enim licuiſſet præterire omnes partitionum modos, qui ipsi non plures quàm duas, h. e. (cum eâ quam jam habere ſupponitur) quàm tres ſignatas attribuunt; & ex reliquis duntaxat illos paucos conſiderare, qui nulli cæterorum colluſorum plures quàm huic ſignatas addicunt, quique in tabula lit. N notati conſpiciuntur; cùm in cæteris ſignatarum partitionibus omnibus eum vi pacti toto deposito privari sit conſpicuum. Nota denique idem fore genus Problematis, si loco chartarum luſoriarum alternatim accipiendarum calculi sive ſchedulæ aliæve res ſimiles, quarum aliquæ ſint ſignatæ, in loculo vel urna recondantur, atque ex iis colluſores aliquot alii pauciores alii plures, sive ſimul & ſemel ſeu ſucceſſivè, eximant, eâ conditione, ut ille vincere cenſendus ſit, qui plures ſignatas exemerit. Supputandi enim ratio ubique eadem, neque (quod iteratò hîc moneo) circumſtantia hæc de eximendis continuò vel alternatim calculis quicquam ad rem facit.

Colum. 1. D.A.B.C.	Casus	Colum. 2. D.A.B.C
—.3.3.—	1	1.7.6.2
—.3.—.3	1	1.7.3.5
—.—.3.3	1	1.4.6.5
—.3.2.1	9	1.7.5.3
—.3.1.2	9	1.7.4.4
—.2.3.1	9	1.6.6.3
—.1.3.2	9	1.5.6.4
—.2.1.3	9	1.6.4.5
—.1.2.3	9	1.5.5.5
—.2.2.2	27	1.6.5.4
1.3.2.—	12	2.7.5.2
1.3.—.2	12	2.7.3.4
1.2.3.—	12	2.6.6.2
1.—.3.2	12	2.4.6.4
1.2.—.3	12	2.6.3.5
1.—.2.3	12	2.4.5.5
1.3.1.1	36	2.7.4.3
1.1.3.1	36	2.5.6.3
1.1.1.3	36	2.5.4.5
1.2.2.1	108	2.6.5.3
1.2.1.2	108	2.6.4.4
1.1.2.2	108	2.5.5.4
2.3.1.—	18	3.7.4.2
2.3.—.1	18	3.7.3.3
2.1.3.—	18	3.5.6.2
2.—.3.1	18	3.4.6.3
2.1.—.3	18	3.5.3.5
2.—.1.3	18	3.4.4.5
2.2.2.—	54	3.6.5.2
2.2.—.2	54	3.6.3.4
2.—.2.2	54	3.4.5.4
2.2.1.1	162	3.6.4.3
2.1.2.1	62	3.5.5.3
2.1.1.2	162	3.5.4.4

Colum. 1. D. A. B. C	Casus	Colum. 2. D. A. B. C	
3.3.—.—	4	4.7.3.2	
3.—.3.—	4	4.4.6.2	
3.—.—.3	4	4.4.3.5	
3.2.1.—	36	4.6.4.2	
3.2.—.1	36	4.6.3.3	
3.1.2.—	36	4.5.5.2	
3.—.2.1	36	4.4.5.3	
3.1.—.2	36	4.5.3.4	
3.—.1.2	36	4.4.4.4	N
3.1.1.1	108	4.5.4.3	
4.2.—.—	3	5.6.3.2	
4.—.2.—	3	5.4.5.2	N
4.—.—.2	3	5.4.3.4	N
4.1.1.—	9	5.5.4.2	N
4.1.—.1	9	5.5.3.3	N
4.—.1.1	9	5.4.4.3	N

Summa, 1716. Caſus.

Colluſores	Caſus, quibus obtinent A	B	C	D.
1	1035	188	22	12
$\frac{1}{2}$	399	342	66	21
$\frac{1}{3}$	9	9	9	—
$\frac{1}{4}$	36	36	36	36
0	237	1141	1583	1647
Summa Caſuum	1716	1716	1716	1716

PROBLEMA XI.

Propoſitum ſit, ſex teſſeræ jactibus ſex ejus hedras jacere, ſingulas ſingulis, ſic ut nulla hedrarum bis redeat. Quæritur expectatio ad hoc efficiendum?

Patet, ſingulos teſſeræ jactus ſex caſibus ſubeſſe pro numero hedrarum. Harum nulla aleatori primo jactu contraria eſt; ſecundo jactu hedra primi jactûs ei eſt adverſa, cæteris tantùm quinque faventibus. Tertio jactu hedræ duorum præcedentium jactuum ipſi nocent, faventque tantùm 4 reliquæ. Ita quarto jactu duntaxat ipsi proſunt hedræ 3, quinto tantùm duæ, & ſexto unica. Problema igitur huc redit, ut inveniatur expectatio ejus, qui ſucceſſivè ſexies præſtare debet aliquid, ſumma omnium caſuum in ſingulis aleis exiſtente 6, numero verò caſuum ipsi faventium in primâ aleâ 6, in ſecundâ 5, in tertiâ 4, & ſic porrò. Hæc ad Prop. XII. pr. part. generaliter inventa eſt $\frac{beh\ \&c.}{adg\ \&c.}$ ubi b, e, h &c. ſeorſim valent 6, 5, 4 &c. a, d, g &c. verò ſingulæ 6: unde $\frac{beh\ \&c.}{adg\ \&c.}$ ∞ $\frac{6.5.4.3.2.1}{6.6.6.6.6.6}$ ∞ $\frac{5.4.3.2.1}{6.6.6.6.6}$ ∞ $\frac{5}{324}$.

PROBLEMA XII.

Propoſitum ſit, ſex teſſeræ jactibus ſex hedras ordine *jacere, primo jactu unum punctum, ſecundo duo puncta, tertio tria &c. Quæritur expectatio ad hoc præſtandum?*

Quia ſex hedræ ordine jaciendæ ſunt, aleator in ſingulis jactibus non niſi unum caſum habet, qui ſibi prodeſſe poſſit: unde cùm hîc ſingulæ literarum b, e, h &c. valeant 1, erit expectatio quæſita $\frac{beh\ \&c.}{adg\ \&c.}$ ∞ $\frac{1.1.1.1.1.1}{6.6.6.6.6.6}$ ∞ $\frac{1}{46656}$.

PRO-

PROBLEMA XIII.

Tres colluſores A, B, C, quorum ſinguli ſcriptas ante ſe habent ſex primas notas numerales, alternatim teſſerâ ludunt hâc conditione, ut quem quisque punctorum numerum jecerit, ex ſuis notis deleat; aut, ſi non habeat ampliùs, ſequens ludere pergat, donec quis primus omnes ſex notas deleverit. Contingit autem, ludo aliquandiu continuato, ut ipſi A reſtent adhuc notæ 2, ipſi B 4, & C 3; ordoque jaciendi tangat ipſum A. Quæruntur ipſorum ſortes?

Problema hocce plus laboris & patientiæ quàm ingenii requirit: ob magnam enim caſuum varietatem numeri protinus in immenſum excreſcunt; nec novi malo medelam, niſi putemus operationem aliquantulum contrahi poſſe, ſi ex ſortibus aleatorum, quæ in ſingulos jactus mutantur, illas tantùm inveſtigemus, quas poſt ternos quosque jactus acquirunt, cùm vices ludendi ad ipſum A redierint. Hunc in finem conſidero, quòd, dum colluſores ſucceſſivè tres jactus inſtituunt, fieri poſſit, ut vel nullus colluſorum, vel unus, vel duos, vel omnes tres aliquam ex ſuis notis ſuperſtitibus jaciant: quot caſibus autem unumquodque horum fiat, ex Reg. Pr. XII part. 1. ſubnexa perſpicuum eſt, juxta quam (si numerum notarum ſuperſtitum pro ordine colluſorum vocemus *b*, *e*, *h*, numerum deletarum *c*, *f*, *i*; ſummam utriuſque *b*+*c* vel *e*+*f* vel *h*+*i* ∞ *a* ∞ 6 numero hedrarum unius teſſeræ) numerus caſuum, qui nulli colluſorum delendam notam ſignificant, eosque adeò in priſtino ſtatu relinquunt, invenitur *cfi*; eorum qui ſoli A, *bfi*; qui ſoli B, *eci*, &c. ut ex appo-

appoſito laterculo apparet; numerus verò omnium caſuum a^3 ∞ 6.6.6 ∞ 216, rejectisque per Cor. 4. Prop. 3. part. 1. iis, quibus colluſorum ſortes invariatæ manent, numerus cæterorum $a^3 - cfi$.

Null.	A	B	C	A&B	A&C	B&C	A, B&C.
cfi	bfi	eci	hcf	bei	bhf	ehc	beh.

Quibus præmiſſis ſortes colluſorum ſupputo ad omnes ſtatus, in quos ludum continuando pervenire poſſunt, incipiendo à ſimpliciſſimo, & pergendo ad omnes ſequentes uſque ad ſtatum propoſitum, ordine quem hîc ſubjungo; quandoquidem nullius ſequentium ſors haberi poteſt, quin ſortes omnium præcedentium compertæ habeantur:

A	1.1.1	1.1.1	1.1.1	1.1.1	2.2.2	2.2.2	2.2.2	2.2.2
B	1.1.1	2.2.2	3.3.3	4.4.4	1.1.1	2.2.2	3.3.3	4.4.4
C	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3

Primò pono, ſingulis colluſorum unicam ſupereſſe notam, quo caſu literæ b, e, h, ſingulæ valebunt 1, & ſingulæ c, f, i, 5; conſideroque quòd primus A victoriâ potiatur, ſive ipſe ſolus, ſive una cum alterutro vel utroque reliquorum, proximis tribus jactibus notam ſuam ſuperſtitem jecerit: ſed quòd ſecundus B tum demùm vincere poſſit, cùm vel ſolus vel cum tertio C id præſtiterit: tertius verò C non niſi cùm ſolus id effecerit; unde ſortes ipſorum hæ fient: ſors A ∞ $\frac{bfi + bei + bhf + beh}{a3 - cfi}$ ∞ $\frac{aab}{a3 - cfi}$ ∞ $\frac{36}{91}$: ſors B ∞ $\frac{eci + ehc}{a3 - cfi}$ ∞ $\frac{aec}{a3 - cfi}$ ∞ $\frac{30}{91}$: ſors C ∞ $\frac{hcf}{a3 - cfi}$ ∞ $\frac{25}{91}$.

Fingo deinde, ſingulis priorum duorum reſtare unam; & tertio C duas notas; quo pacto valor lit. h eſt 2, & i, 4: perpendoq; quòd in proximo jactuum ternario omnia eodem modo eveniant, ſicut in præced. hypoth. excepto tantùm, cùm ſolus C notam ſuam ſuperſtitem jecerit: tum enim nemo adhuc vincit, ſed omnes in eum ſtatum perveniunt, qui in dictâ hyp. præced. ſuppoſitus fuit. Unde

fient

fient ſortes, A $\propto \frac{aab.1 + bcf.36:91}{a3 - cfi} \propto \frac{36.1 + 50.36:91}{116} \propto \frac{2538}{5278}$: B $\propto \frac{aec.1 + bcf.30:91}{a3 - cfi} \propto \frac{30.1 + 50.30:91}{116} \propto \frac{2115}{5278}$: C $\propto \frac{bcf.25:91}{a3 - cfi} \propto \frac{50.25:91}{116} \propto \frac{625}{5278}$.

Atque ita reliquorum etiam ſtatuum ſortes perquiri poſſunt. Sed calculus integer eſt hominis otio abundantis: nos occupatiores ad alia tranſimus.

PROBLEMA XIV.

Duo Colluſores A & B, teſſera in alveum projecta, conveniunt inter ſe, ut quot ejus puncta ceciderint, tot jactus uterque inſtituat, illeq; depoſitum auferat, qui plura ſummatim puncta jecerit; ſin autem æqualis punctorum numerus ambobus contingat, æqualiter etiam depoſitum inter ſe partiantur. Mox verò colluſorum alter B ludi pertæſus loco incertæ aleæ certum punctorum numerum aſſumere, & punctis 12 *pro rata ſua acquieſcere mavult. Annuit A. Quæritur uter altero, & quanto potiorem vincendi ſpem habeat?*

Determinandum ante omnia, an primus teſſeræ jactus accenſeri debeat jactibus colluſoris A, necne. Ponamus primò non accenſeri: idcirco

Si primo jactu unum punctum cadit, colluſor A unum duntaxat jactum inſtituet, qui ad ſummum ipſi ſenarium adducere poteſt; unde cùm B ex pacto ſumſerit puncta 12, A neceſſariò perdet, nihilque depoſiti habebit.

Si primo jactu duo cadant puncta, A duos teſſeræ jactus inſtituet, ſeu (quod per Annot. Prop. 12 pr. part. tantundem valet) duabus teſſeris unum jactum: ſed in duabus teſſeris ſunt caſus 36, quorum unicus tantùm eſt punctorum 12, qui ipſi A ex pacto ſemiſſem depoſiti lucratur; cæteri omnes ſunt pauciorum punctorum, quibus ille nihil acquirit; unde tum ſors ejus eſt $\frac{1.^{1:2}+35.^{0}}{36} \infty \frac{1}{72}$.

Si primo jactu cadat ternarius, colluſori A tres teſſeræ jactus concedendi, ſeu (quod perinde) tribus teſſeris jactus unus. Reperiuntur autem in tribus teſſeris caſus 216, quorum 25 ſunt duodecim, 135 pauciorum, & cæteri 56 plurium punctorum: unde habebit ex pacto 25 caſus ad ſemiſſem depoſiti, 135 ad nihil, & 56 ad totum depoſitum; quod ipſi tunc valet $\frac{25.^{1:2}+135.^{0}+56.^{1}}{216} \infty \frac{137}{432}$.

Eodem pacto, ſi primo jactu quaternarius obtingat, ſors colluſoris A fiet $\frac{125.^{1:2}+310.^{0}+861.^{1}}{1296} \infty \frac{1847}{2592}$: & ſi quinarius, ſors erit $\frac{305.^{1:2}+457.^{0}+7014.^{1}}{7776} \infty \frac{14333}{15552}$: ſi denique ſenarius, ſors ejus prodibit $\frac{456.^{1:2}+462.^{0}+45738.^{1}}{46656} \infty \frac{7661}{7776}$.

Jam verò æquè facilè contingere poteſt, ut primo teſſeræ jactu unum, duo, tria, 4, 5 vel 6 puncta cadant; idcirco ſors colluſoris A, quam ab initio ludi habet, per Prop. 2. pr. part. eſt ſexta pars aggregati omnium ſortium particularium $0, \frac{1}{72}, \frac{137}{432}, \frac{1847}{2592}, \frac{14333}{15552}, \frac{7661}{7776}$; videlicet $\frac{15295}{31104}$; & relinquitur pro ſorte colluſoris B, $\frac{15809}{31104}$.

Ponamus deinde, primum teſſeræ jactum, qui numerum jactuum Colluſoris A determinare debet, & ipſum his jactibus accenſendum eſſe: quo poſito, ſi prima vice unum punctum cadit, liquet A perditurum. Idem intellige, ſi duo puncta ceciderint; tum enim ipſi

ipſi A unicus jactus reſtat, quo ſex ad ſummum puncta jacere poteſt, quæ addita primi jactus binario non niſi 8 puncta efficiunt, cùm alteri B 12 conceſſerit.

Si prima vice tria jaciantur puncta, duo ſuperſunt peragendi jactus à colluſore A, quibus 36 caſus reſpondent. Hos inter ſunt 4, qui ipſi afferunt puncta 9 (h. e. connumerato primi jactus ternario, puncta 12) 26 caſus, qui pauciora; & 6 qui plura. Habet ergo tum 4 caſus ad $\frac{1}{2}$, 26 ad 0, & 6 ad 1; id quod ipſi ſortem parit $\frac{2}{9}$.

Si primo jactu colluſori A quaternarius obtingat, tres ipſi jactus inſuper inſtituendi ſunt, in quibus 216 caſus reperiuntur. Horum ſunt 21, qui ipſi adducunt puncta 8 (id eſt, ſi 4 primi jactus puncta accenſeas, puncta 12) 35 caſus, qui puncta pauciora, & 160 qui plura; unde ſors colluſoris A fiet $\frac{21.\frac{1}{2}+35.0+160.1}{216} \infty \frac{341}{432}$.

Ad eundem modum reperitur ſors ejus, ſi primo jactu quinarius evenerit, $\frac{1271}{1296}$; & ubi ſenarius, $\frac{15545}{15552}$.

Ergo, cùm primo jactu omnes ſex hedræ unius teſſeræ æquè ſint in proclivi, ſequitur, ſortem colluſoris A, quam ab initio ludi obtinet, fore ſextam partem aggregati omnium ſortium particularium 0, 0, $\frac{2}{9}$, $\frac{341}{432}$, $\frac{1271}{1296}$ & $\frac{15545}{15552}$, videl. $\frac{46529}{93312}$; ſic ut colluſori B relinquatur $\frac{46783}{93312}$, qui proinde in utraque hypotheſi potiorem vincendi ſpem habet.

Ut Lectores noſtri exemplo diſcant, quàm cautè in his ratiociniis ſit verſandum, ne quis nubem pro Junone captet; non abs re me facturum ſpero, ſi hîc ſubnectam ſpecimen ſolutionis *alicujus* ſpuriæ atque fallacis ejuſdem Problematis, quâ quærere quis poſſet valorem expectationis in ipſis punctis, & quam, priore ſolutione non cognitâ, legitimam & genuinam eſſe facilè juraret. Nimirum in 1. *hypoth.* ſi contingit, ut colluſor A unicum jactum inſtituere debeat, illo jactu vel 1, vel 2, 3, 4, 5, vel deniq; 6 puncta impetrabit, quorum unumquodque eum pari facilitate accidere poſſit, valebit hoc ipſi per Prop. 2. part. 1. $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} \infty 3\frac{1}{2}$ puncta, medium arithme-

ticum inter 1 & 6. Sin ipſo contingunt duo jactus inſtituendi, illis jactibus vel 2, 3, 4 &c. vel denique 12 puncta conſequetur; & quia unus caſus eſt, quo 2 puncta, & unus quo 12: duo verò caſus quibus 3 & duo quibus 11: nec non tres caſus quibus 4, & totidem quibus 10 puncta acquirit, & ſic porrò; cenſebitur ejus expectatio, per Prop. 3. part. 1. punctorum

$$\frac{1.^{2}+1.^{12}+2.^{3}+2.^{11}+3.^{4}+3.^{10}+4.^{5}+4.^{9}+5.^{6}+5.^{8}+6.^{7}}{36} \infty \frac{1.^{2+12}+2.^{3+11}+3.^{4+10}+4.^{5+9}+5.^{6+8}+6.^{7}}{36} \infty \frac{1.^{14}+2.^{14}+3.^{14}+4.^{14}+5.^{14}+6.^{7}}{36} \infty \frac{15.^{14}+6.^{7}}{36} \infty \frac{18.^{14}}{36} \infty 7,$$

quod medium quoq; arithmeticum eſt inter extrema puncta 2 & 12. Quòd ſi ipſum tres jactus inſtituere contingit, poterit illis jactibus impetrare 3, 4, 5 &c. uſq; ad 18 puncta, quorum quæ ab extremis 3 & 18 æquè ſunt remota, æquali ſemper caſuum numero ſubjacent; unde eodem modo oſtendetur, quòd ejus expectatio tum valeat puncta $10\frac{1}{2}$, medium itidem arithmeticum inter extrema 3 & 18. Pariter etiam, ſi 4, 5 aut 6 jactus ipſi peragendi ſunt, ejus expectatio inter 4 & 24, inter 5 & 30, inter 6 & 36, qui ſunt extremi numeri punctorum quæ 4, 5 & 6 teſſeris evenire poſſunt, media erit, adeoque punctorum 14, $17\frac{1}{2}$ & 21. Quare cùm æquè facilè contingere poſſit, ut colluſor A vel 1, vel 2. 3, 4, 5 aut 6 jactibus defungi teneatur, æquam etiam habebit expectationem ad puncta $3\frac{1}{2}$, 7, $10\frac{1}{2}$, 14, $17\frac{1}{2}$ & 21; qui numeri cùm & ipſi ſint in arithmetica progreſſione, interque extremos medius exiſtat $12\frac{1}{4}$, indicant expectationem hanc æſtimandam eſſe $12\frac{1}{4}$ punctorum.

Haud abſimili ratione in 2dâ *hypoth.* procedere licet: nam ſi colluſor A prima vice unum jaciat punctum, habebit unum. Si duo jecerit puncta, habebit puncta 2, & præterea adhuc unum jactum, qui ipſi per ante dicta valet $3\frac{1}{2}$ puncta; adeoq; cum duobus illis habebit puncta $5\frac{1}{2}$. Si tria ipſi puncta ceciderint, habebit præter hæc 3 puncta duos jactus, quos ipſi valere diximus 7 puncta; proinde in totum habebit puncta 10. Non ſecus ſi 4, 5 aut 6 puncta primo jactu evenerint, oſtendetur habere $14\frac{1}{2}$, 19 aut $23\frac{1}{2}$ puncta. Unde cùm initiò pari facilitate 1, 2, 3, 4, 5 aut 6 puncta jacere poſſit, æquam itidem

& pro-

& (propter arithmeticam progreſſionem) mediam inter 1, $5\frac{1}{2}$, 10, $14\frac{1}{2}$, 19 & $23\frac{1}{2}$ puncta expectationem obtinebit; quæ quidem rurſus eſt ut antea punctorum $12\frac{1}{4}$.

Itaq; cùm in utraq; hypotheſi colluſor A habere cenſeatur puncta $12\frac{1}{4}$, quorum alteri B tantum 12 conceſſa ſunt, colligendum videtur, expectationem ipſius A potiorem eſſe quàm B. Hujus autem contrarium ex priore ſolutione, quæ ſua luce radiat, apparet; quanquam profectò difficile dictu eſt, cur ille plura quàm hic puncta, minorem autem depoſiti partem expectet, cùm tamen acquiſitio depoſiti vi pacti pendeat à punctorum pluralitate.

PROBLEMA XV.

Cæteris poſitis, ut ante, Colluſor B pro rata ſua quadratum numeri punctorum primi jactus concedi ſibi poſtulat. Quæritur nunc ratio ſortium?

Diſtinguantur rurſus hypotheſes:

1. *Hypoth.* Intelligatur jactus primus non accenſeri jactibus colluſoris A: Igitur ſi primo jactu unum punctum cadit, Colluſori B ex pacto quoque tantùm unum tribuitur, dum alter A inſtituet unum jactum, è cujus 6 caſibus unus eſt, qui unicum; & 5 qui plura ei puncta advehunt: adeoque 1 caſus qui ipſum ex ſemiſſe, & 5 qui ipſum ex aſſe victorem reddunt; id quod ſortem ei parit $\frac{1 \cdot 1:2 + 5 \cdot 1}{6} \infty \frac{11}{12}$.

Si primo jactu cadit binarius, ipſe B ex pacto habebit bis duo ſeu 4 puncta, dum colluſori A duo jactus concedendi: ſunt autem in 2 jactibus 36 caſus, interque illos tres punctorum tot quot habet B, nempe punctorum 4; ut & tres pauciorum punctorum, & 30 plurium: unde ſors ipſius A fit $\frac{3 \cdot 1:2 + 3 \cdot 0 + 30 \cdot 1}{36} \infty \frac{7}{8}$.

Si primo jactu ternarius evenit, acquiruntur ipſi B ter tria ſeu 9 puncta, ipſique A 3 jactus, qui caſus præbent 216. Hos inter ſunt

 25 pun-

25 punctorum, novem (tot ſcil. quot habet B) 56 pauciorum & 135 plurium punctorum; quod ſortem efficit $\frac{25.\,^{1:2} + 56.\,^{0} + 135.\,^{1}}{216}$ $\infty\ \frac{295}{432}$.

Simili diſcurſu reperitur, ſi primo jactu quaternarius, quinarius vel ſenarius prodierit, ſortem colluſoris A fore $\frac{745}{2592}$, $\frac{7}{288}$, aut $\frac{1}{93312}$. Cùm igitur omnes 6 caſus primi jactus ſint æquè proclives, ſexta pars aggregati harum fractionum $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{295}{432}$, $\frac{745}{2592}$, $\frac{7}{288}$ & $\frac{1}{93312}$, nempe $\frac{259993}{559872}$ indicabit quæſitum; unde alteri B relinquitur $\frac{299879}{559872}$.

2. *Hypoth.* Sit nunc primus jactus & ipſe computandus cum jactibus colluſoris A: quo poſito

Si unum prodeat punctum, liquet utrumque colluſorum habere punctum, adeoque depoſiti ſemiſſem.

Si duo emergant puncta, habebit B ex pacto puncta 4, alterq; A præter jactum quo jam functus eſt adhuc alium inſtituet, è cujus 6 caſibus unus eſt, qui 2 puncta (i. e. ſi primi jactus binarium unà computes, 4 puncta, tot ſcil. quot B habet) unus itidem caſus qui pauciora, & 4 qui plura ipſi afferunt: unde ſors ejus tunc erit $\frac{1.\,^{1:2} + 1.\,^{0} + 4.\,^{1}}{6}$ $\infty\ \frac{3}{4}$.

Si tria jaciantur puncta, B puncta 9 habebit, A verò præcedenti jactui duos adhuc ſuperaddet, qui 36 caſibus ſunt ſubjecti. Ex horum numero ſunt 5 qui ſex ipſi puncta producunt (h. e. comprehenſo primi jactus ternario totidem, quot B habet) 10 caſus qui pauciora, & 21 qui plura; id quod colluſori A ſortem progenerat $\frac{5.\,^{1:2} + 10.\,^{0} + 21.\,^{1}}{36}$ $\infty\ \frac{47}{72}$.

Simili ratiocinio colliges, ſi primâ vice 4, 5 vel 6 puncta cadant, ſortem colluſoris A futuram $\frac{137}{432}$, $\frac{35}{864}$ vel $\frac{1}{15552}$. Ob ſex igitur caſus primi jactus æquè proclives, ſexta pars aggregati omnium fractionum $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{47}{72}$, $\frac{137}{432}$, $\frac{35}{864}$ & $\frac{1}{15552}$, nempe $\frac{35155}{93312}$ oſtendet quæſitum; ita ut colluſori B relinquatur $\frac{58157}{93312}$, cui ſic rurſus in utraque hypotheſi potior expectatio contingit.

PRO-

PROBLEMA XVI.

Æſtimatio ſortis in ludo, dicto Cinq & neuf.

In Gallia, Dania, Suecia, Belgio, inferiore Germania & locis finitimis aleæ quoddam genus in uſu eſt, quod vocant *Cinq & neuf*, quodque inter duos colluſores A & B duabus teſſeris inſtituitur, ludendi vices perpetuas in ſe recipiente altero eorum A. Conditiones ludi ſunt tales: Si A prima vice jaciat 3 vel 11, aut puncta duplicata quæcunque (*un doublet*, ein Paſch) putà duas unitates, duos binarios, ternarios &c. vincit ipſe A: ſi jaciat 5 vel 9, vincit alter B, ſi alium quemvis punctorum jecerit numerum, putà 4, 6, 7, 8, vel 10 neuter eorum adhuc vicit, ſed ludum proſequi tenentur, donec aut 5 vel 9 puncta ceciderint, quo caſu ipſe ſemper B victor erit; aut donec idem præciſè punctorum numerus, qui primo jactu prodiit, redierit; qui caſus ipſum A victorem reddit: conditio enim de jaciendis punctis 3 vel 11, aut duplicatis quibuſvis ipſi non niſi in primo jactu prodeſt. Quibus poſitis quæritur ratio ſortium?

Quoniam colluſor A, quatenus prima vice 4, 6, 7, 8 aut 10 puncta jacere poteſt, ad ſortes pervenit etiamnum incognitas & inexploratas, hæ ante omnia veniunt inveſtigandæ.

Ponamus itaque prima vice jeciſſe quaternarium, & nunc in procinctu eſſe alterum inſtituendi jactum. Quare cùm in duabus teſſeris tres ſint caſus, qui eundem quaternarium revehunt, ipſumque A victorem ludi reddunt; & octo alii qui 5 vel 9 puncta afferunt, eique depoſiti jacturam cauſantur; dum cæteri omnes ipſum ad repetitionem jactus obligant, eoque non plus efficiunt per Cor. 4. Prop. 3. part. 1. quàm ſi prorſus abeſſent; idcirco fiet ejus expectatio $\frac{3 \cdot 1 + 8 \cdot 0}{11} \propto \frac{3}{11}$. Atque hæc quoque illi ſors acquiritur, ſi primo jactu denarius ceciderit, cùm in duabus teſſeris denario & quaternario æqualis caſuum numerus reſpondeat.

Pona-

Ponamus deinde, primo jactu prodiiſſe ſenarium. Itaque cùm 5 caſus ſint, quibus altero jactu idem redire poteſt ſenarius, cùm rurſus 8 aliis 5 vel 9 puncta obtingere poſſunt; ſequitur nunc colluſorem A 5 habere caſus pro ſe, & 8 contra ſe, (neglectis, ut antea, reliquis, qui ipſum in eodem ſtatu relinquunt) quod ſortem ei parit $\frac{5 \cdot 1 + 8 \cdot 0}{13} \infty \frac{5}{13}$. Quanta quoque illius expectatio eſt, ſi primo jactu octonarius evenerit; cùm ſenarius & octonarius eidem caſuum numero ſint obnoxii.

Ponamus denique, primo jactu cecidiſſe ſeptenarium. Unde cùm idem ſeptenarius ſequenti jactu ſex caſibus redire poſſit, erunt nunc 6 caſus, pro colluſore A, dum 8 ut antea ſunt pro adverſario; quod ſortem ipſius A efficit $\frac{6 \cdot 1 + 8 \cdot 0}{14} \infty \frac{3}{7}$.

His ita inventis pergo in Problemate, conſiderando ſtatum colluſoris A ante primum jactum, & examinando quot ille caſibus per jactum hunc ad unamquamque præcedentium ſortium pervenire poſſit: Primò conſtat, in teſſeris duabus ſex eſſe caſus punctorum duplicatorum quorumque, ut & quatuor alios punctorum trium vel undecim, adeoque 10 in univerſum caſus, qui colluſorem A ex ludi præſcripto totius depoſiti dominum reddunt. Deinde etiam liquet, ut jam inſinuatum eſt, 8 eſſe caſus punctorum quinque vel novem, quibus ille contra toto depoſito excidit. Præterea numerantur 6 caſus quatuor ſimul & decem punctorum, ſed comprehenſi in iis ambo caſus duplicati binarii & quinarii, quibus colluſor A toto depoſito potitur, quorumque ratio jam habita eſt; his igitur ſubtractis remanent tantùm 4, qui ipſum ad ſortem ſupra inventam $\frac{3}{11}$ perducunt. Porrò habentur caſus 10 pro ſex & octo punctis, unde demtis iterum duobus pro duplicato ternario & quaternario, relinquuntur 8, qui illum ad ſortem ſupra repertam $\frac{5}{13}$ promovent. Tandem reliqui ſunt 6 caſus ad puncta ſeptem, quibus ſupra oſtendimus ipſi ſortem acquiri $\frac{3}{7}$. Omnibus igitur in compendium redactis, clarum eſt, expectationem Aleatoris A, quam ab initio ludi habet, fore

$$\frac{10 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 3:11 + 8 \cdot 5:13 + 6 \cdot 3:7}{36} \infty \frac{4189}{9009},$$ ac proinde col-

luſoris

luſoris B $\frac{4820}{9009}$, ſic ut ratio ſortium ſit, ut 4189 ad 4820. Unde perſpicuum ſit, potiorem hujus quàm illius conditionem eſſe, ut maximè ſint qui ſecus exiſtiment, inque partes ipſius A tranſire malint.

PROBLEMA XVII.

Æſtimatio ſortis in alio quodam Aleæ genere.

Memini me olim tempore nundinarum quendam hic vidiſſe Circulatorem, qui ſequens aleæ genus in foro exponebat, eoque prætereuntes alliciebat. Diſcus erat orbicularis ad libellam compoſitus, versùs medium parumper acclivis; Limbum circumcingebant 32 loculi ſeu foraminula contigua & æqualia, quæ in quatuor diſtincta claſſes vel ſeries numeris ordine ab I uſque ad VIII quater adſcriptis ſignabantur; Medio diſci perpendiculariter imminebat fritillus. Fortunam periclitaturus per cavitatem fritilli quatuor demittebat globulos excipiendos in circumferentia diſci à totidem loculis, auferebatque præmium quod numeris horum loculorum in ſummam collectis dicatum conſpiciebat, majoris minorisve pretii pro aggregati diverſitate, ut ex ſubjuncto laterculo apparet. Singuli autem globulorum jactus ipſi quaternis nummis redimendi erant. Quæritur ipſius expectatio?

Conſtat primò, quòd unoquovis globulorum jactu ad minimum 4, ad ſummum 32 puncta obtineri poſſunt, quorum utrumvis unico duntaxat caſu contingit, illud, ſi globuli ſinguli ſingulorum ordinum prima foramina ſubintrant, iſtud ſi ultima. Deinde obſervo, quòd caſus multiplicentur pro intermediis punctorum numeris, prout ab utrovis extremo 4 aut 32 magis recedunt, & quòd maximo caſuum numero ſit expoſitus numerus 18, medius arithmeticus inter 4 & 32; bini autem numeri à medio 18 ſupra infraque æqualiter remoti æquali quoque caſuum numero ſubſint. Tertiò conſidero, quòd foraminula, quæ quovis jactu globulos excipiunt, vel omnia quatuor ſignata eſſe poſſint eodem determinato numero; vel tria eodem, quar-

 tum

Puncta		*Nummi*		*Caſus communes.*
4	32	120	180	1
5	31	100	32	16
6	30	30	25	52
7	29	24	24	128
8	28	18	16	245
9	27	10	12	416
10	26	6	8	664
11	25	6	6	976
12	24	6	4	1369
13	23	5	4	1776
14	22	3	3	2204
15	21	3	3	2560
16	20	3	3	2893
17	19	2	3	3088
18		2		3184

tum diverſo: vel duo eodem, & reliqua duo alio eodem numero: vel duo eodem, & cætera duo diverſis: vel denique omnia quatuor differentibus determinatis numeris; quorum quidem primum unico, alterum 16, tertium 36, quartum 96, ultimum 256 caſibus accidere poteſt. Etenim cùm quaterni ſint loculi homologi, ſive eodem determinato numero putà I notati, ſi globulorum nonnulli putà tres ab iſtis loculis ſunt excipiendi, liquet hoc tot caſibus contingere poſſe, quot terniones in rebus 4 continentur, nempe quatuor; adeò ut ſi quartus inſuper globulus in aliquem loculum alio numero, ex. gr. II. ſignatum ſe recipere debeat (quod ob quatuor uniones in rebus 4 rurſum quatuor caſibus evenit) concludi poſſit, quater quatuor ſeu 16 in univerſum caſus exiſtere, qui efficiant, ut tres globuli tres loculos n.° I ſignatos & ſimul quartus unum loculorum n.° II notatorum ſubintret. Quemadmodum etiam colligere promtum eſt, ob ſex biniones rerum quatuor, ſexies ſex ſeu 36 caſus haberi, quibus contingat, ut duo loculi n.° I conſpicui à duobns, & duo n.° II notati ab aliis duobus globulis occupentur: nec non ſexies quater quatuor, h. e. 96 caſus, quibus duo loculi num. I à duobus, unus loculorum n. II à tertio, & unus n.° III à 4to globulo occupetur: ac denique 4.4.4.4 h. e. 256 caſus, quibus unus globulorum in loculum n I, alius in loculum n.° II, tertius in loculum III, & quartus in IV ſe recipiat. Ubi tandem notandum, quod ad variationes illas 24, quæ ex ſolâ 4 globulorum permutatione mutuâ oriuntur, non attendamus, quippe quæ inſuper haberi poſſunt ceu totidem caſus ſecundarii, ex quibus unusquiſque primariorum conflatur.

His

His ita præmiſſis & intellectis inquirendum eſt in numerum caſuum cuivis punctorum numero convenientem, eo ferè modo quo ſupra poſt Prop. 9. part. 1. ad numeros jactuum in teſſeris inveſtigandos uſi fuimus; reſolvendo vid. propoſitum punctorum numerum ob 4 globulos in 4 partes, quarum nulla octonarium ſuperet (quòd loculis majores numeri non ſint adſcripti) idque omnibus modis poſſibilibus, ac deinde ſingulis modis juxta ſupra obſervata ſuos tribuendo caſuum numeros; horum enim ſumma quæſitum exhibebit. At quoniam eâ ratione numerus caſuum duntaxat pro dato punctorum numero inveniretur, nobis verò caſuum notitia pro univerſis punctis neceſſaria eſt, poterimus aliam compendioſiorem inire viam, & omnia una operatione conſequi, hoc modo:

In ſupremo ſequentis Tabulæ margine ſcribantur ordine numeri punctorum à IV uſque ad XVIII; ſufficit enim horum determinaſſe caſus, cùm ſinguli ſupra XVIII cum ſingulis infra in caſuum multitudine, uti dictum, conveniant.

Ponamus, globulos omnes excipi 4 loculis homologis, erunt eorum numeri vel 4 unitates, vel 4 binarii, ternarii, quaternarii &c. quorum ſummæ ſunt, 4, 8, 12, 16, &c. quare ſignetur in margine ſiniſtro 1. 1. 1. 1 (cæteris 2. 2. 2. 2 &c. uſq; ad 8. 8. 8. 8 mente ſubintellectis) & è regione ſub ſingulis punctorum numeris IV. VIII. XII. XVI. &c. notentur ſingulæ unitates.

Ponamus tres globulos excipi loculis homologis, quartum diverſo: erunt homologorum numeri vel tres unitates, vel totidem binarii, ternarii &c. Si tres unitates, quartus numerus erit vel binarius, vel ternarius, quaternarius &c. qui ſinguli juncti unitatibus ſummas efficiunt V. VI. VII. VIII. . . . XI; quocirca in margine ſignetur 1. 1. 1. 2 (reliquis 1. 1. 1. 3 &c. uſque ad 1. 1. 1. 8 mente ſuppletis) & è regione ſub punctis V. VI. VII. . . XI. ſcribatur 16. Si homologorum numeri ſint tres binarii, quartus erit vel 1, vel 3, vel 4 &c. qui juncti binariis ſummas exhibent VII. IX. X. . . XIV; quare in margine ponatur 2. 2. 2. 1 (cæteris 2. 2. 2. 3 &c. ſubintellectis) & è regione ſub ſingulis punctorum VII. IX. X. . . . XIV. rurſus ſcribatur 16. Similiter etiam procedendum, ubi homologorum numeri ſunt tres ternarii, exiſtente quarto 1. 2. 4 aut 5 &c. aut

tres quaternarii, exiſtente quarto 1. 2. 3. aut 5 &c. aut tres quinarii &c. exiſtente ſemper quarto uno reliquorum, ſcribendo nempe 16 ſub ſingulis punctorum ſummis, quas additi 4 loculorum numeri efficiunt.

Ponamus porrò loculos globulorum duos homologos, & alios duos rurſus homologos, ſed à prioribus diverſos: erunt numeri loculorum vel duæ unitates cum duobus binariis, ternariis, quaternariis &c. qui unitatibus juncti faciunt VI. VIII. X....XVIII: vel duo binarii cum 2 ternariis, quaternariis &c. qui additi binariis conſtituunt X. XII. XIV. &c. vel duo ternarii cum totidem quaternariis &c. vel duo quaternarii cum totidem quinariis &c. &c. idcirco notentur in margine Tabulæ 1. 1. 2. 2, 2. 2. 3. 3, 3. 3. 4. 4 &c. (cæteris 1. 1. 3. 3, 1. 1. 4. 4 &c. nec non 2. 2. 4. 4 &c. 3. 3. 5. 5 &c. compendii gratiâ omiſſis) è regione verò ſub ſingulis numerorum tam expreſſorum quàm mente retentorum ſummis ſcribantur 36.

Pergamus deinde ponere loculos globulorum duos homologos, reliquos ab his & inter ſe diverſos: erunt homologorum numeri rurſus vel duæ unitates, vel duo binarii, ternarii &c. & ſi unitates, tertius erit vel binarius cum quarto ternario, quaternario, quinario &c. vel ternarius cum quarto quaternario, quinario &c. & ita conſequenter: ſi duo binarii, tertius eſſe poteſt vel 1 cum quarto 3, 4, 5, 6 &c. vel 3 cum 4to 4, 5, 6 &c. vel 4 cum 4to 5, 6 &c. &c. ſi illi ſunt duo ternarii, tertius exiſtet vel 1 cum 4to 2, 4, 5, 6 &c. vel 2 cum 4to 4, 5, 6 &c. vel 4 cum 4.° 5, 6 &c. &c. ſi illi ſunt quaternarii, 3^{tius} poterit eſſe vel 1 cum 4to 2, 3, 5 &c. vel 2 cum 4to 3, 5 &c. &c. & ita pariter in reliquis omnibus, quamobrem primis harum combinationum 1. 1. 2. 3, 1. 1. 3. 4, &c. nec non 2. 2. 1. 3 &c. 3. 3. 1. 2 &c. in margine notatis & cæteris mente ſuppletis, ſcribantur ſub ſingulis punctorum ſummis, quas ſinguli numerorum quaternarii efficiunt, 96.

Tandem etiam ponamus, loculos globulorum omnes differentibus numeris affectos eſſe; erunt ipſorum combinationes tales: 1. 2. 3 cum 4to 4, 5, 6 &c. 1. 2. 4 cum 4to 5, 6, 7 &c. &c. item 1. 3. 4:

1. 3. 5:

Puncta:

Ad pag. 172.

Combinat.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	XVI.	XVII.	XVIII.
1.1.1.1.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.
1.1.1.2	.	16	16	16	16	16	16	16							
2.2.2.1	.	.	.	16	.	16	16	16	16	16	16				
3.3.3.1	.	.	.	.	.	.	16	16	.	16	16	16	16	16	.
4.4.4.1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	16	16	.	16	16
5.5.5.1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	16	16
1.1.2.2	.	.	36	.	36	.	36	.	36	.	36	.	36	.	36
2.2.3.3	.	.	.	.	.	.	36	.	36	.	36	.	36	.	36
3.3.4.4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	36	.	36	.	36
4.4.5.5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	36
1.1.2.3	.	.	.	96	96	96	96	96	96	.	.	.	.	.	.
1.1.3.4	.	.	.	.	.	96	96	96	96	96	.	.	.	.	.
1.1.4.5	.	.	.	.	.	.	.	96	96	96	96	.	.	.	.
1.1.5.6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96	96	.	.	.
1.1.6.7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96	.	.
1.1.7.8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	.
2.2.1.3	.	.	.	.	96	96	96	96	96	96	.	.	.	.	.
2.2.3.4	.	.	.	.	.	.	.	96	96	96	96	96	.	.	.
2.2.4.5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96	96	96	.	.
2.2.5.6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96	96	.
2.2.6.7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96
3.3.1.2	.	.	.	.	.	96	.	96	96	96	96	96	.	.	.
3.3.2.4	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96	96	96	96	.	.
3.3.4.5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96	96	96
3.3.5.6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96
4.4.1.2	.	.	.	.	.	.	.	96	96	.	96	96	96	96	.
4.4.2.3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	.	96	96	96	96
4.4.3.5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96	96
5.5.1.2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96	96	.	96	96
5.5.2.3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96	.	96
5.5.3.4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	.
6.6.1.2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96	96	96
6.6.2.3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96
7.7.1.2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	96	96
1.2.3.4	.	.	.	.	.	.	256	256	256	256	256	.	.	.	.
1.2.4.5	.	.	.	.	.	.	.	.	256	256	256	256	.	.	.
1.2.5.6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	256	256	256	.	.
1.2.6.7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	256	256	.
1.2.7.8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	256
1.3.4.5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	256	256	256	256	.	.
1.3.5.6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	256	256	256	.
1.3.6.7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	256	256
1.4.5.6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	256	256	256
1.4.6.7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	256
2.3.4.5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	256	256	256	256	.
2.3.5.6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	256	256	256
2.3.6.7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	256
2.4.5.6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	256	256
3.4.5.6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	256
Summa Caſuum	1	16	52	128	245	416	664	976	1369	1776	2204	2560	2893	3088	3184

Summa omnium Caſuum — — 35960.

1. 3. 5: &c. 1. 4. 5 &c. cum 4to &c. nec non 2. 3. 4: 2. 3. 5 &c. cum quarto differenti numero &c. &c. &c. uſque ad 3. 4. 5. 6 quâ cum omnes poſſibiles combinationes ſunt completæ: quocirca primis harum combinationum in margine expreſſis & prætermiſſis reliquis, notentur è regione ſub ſingulis quaternorum numerorum ſummis, 256; prout hæc omnia in adjunctâ Tabulâ præſtita cernuntur.

Additis igitur in unam ſummam, qui in eâdem ſerie perpendiculari ſibi reſpondent, numeris, habebuntur omnes punctorum in vertice ſcriptorum caſus, videl. 1 caſus pro punctis IV, 16 caſus pro punctis V, 52 pro punctis VI; & ita deinceps uſque ad puncta XVIII, qui numerus bis 16, quater 36, decies 96 & octies 256, id eſt, in univerſum 3184 caſibus expoſitus eſt. Et quoniam numeri punctorum ſupra XVIII cum reliquis infra, ſinguli cum ſingulis, putà XIX cum XVII, XX cum XVI &c. in numero caſuum conveniunt, ut initio monuimus & oſtenſu facile eſt, ſequitur, ſi collecti à punctis IV ad XVII caſuum numeri duplentur, duploque 32776 addantur 3184 caſus punctorum XVIII, aggregatum 35960 exhibiturum ſummam omnium omnino caſuum. Quòd autem enumeratio ritè facta ſit, nullaque combinationum prætermiſſa, vel inde patet, quòd numerus quaternionum in rebus (putà loculis) 32, præciſè idem reperitur; eſt enim ille, per Cap. 4. part. 2,

$$\frac{32.31.30.29}{1.2.3.4} \infty 35960.$$

Inventis ſic numeris caſuum pro quovis punctorum numero, cætera oppidò levia ſunt, & expediuntur per Prop. 3. part. 1. multiplicando videl. ſingulos caſuum numeros per ſingula præmia, quæ iſtis caſibus acquiruntur: nempe (cùm punctis IV in ſup. laterculo tribuantur nummi 120, punctis XXXII nummi 180, punctis V nummi 100, punctis XXXI nummi 32, punctis VI 30, punctis XXX 25 &c.) multiplicando 1 caſum per 120, rurſusque per 180; 16 caſus per 100, iterumque per 32; 52 caſus per 30, nec non per 25 &c. ſive brevius, 1 per 300 ∞ 120 + 180, 16 per 132 ∞ 100 + 32, 52 per 55 ∞ 30 + 25, atque ita deinceps uſque ad 3184 per 2: ac tandem dividendo omnium produ-

ctorum ſummam per ſummam omnium caſuum 35960. Sic enim exibunt in quotiente pro expectatione aleatoris nummi $4\frac{349}{3596}$: unde cùm ipſe ex hypoth. ſolis 4 nummis jactum redemerit, apparet potiorem illius quàm circulatoris ſortem eſſe, iſtumque proin hoc aleæ genere, ni præmia minuat, non multum lucrari poſſe.

PROBLEMA XVIII.

De Ludo chartarum, vulgò Trijaques.

Uſitatiſſimum eſt inter Germanos ludi genus, quod *Trijaques* appellatur, & affinitatem quandam habet cum Gallorum *Brelan*: Sumuntur ex Ludo chartarum folia 24 (rejectis cæteris) ex unaquaque ſcil. ſpecie ſex; nimirum *Novenarii*, *Denarii*, *Famuli*, *Heræ*, *Reges* & *Monades*, quæ ſuis poſthac literis initialibus N. D. F. H. R. M denotabuntur, & hunc dignitatis ordinem inter ſe ſervant: Primas tenet *Monas*, ſequitur *Rex*, inde *Hera*, *Famulus*, *Denarius*; ſed omnibus ſupereminent *Novenarii* unà cum *Famulo trifolii* (quem proin etiam Novenariis accenſemus, ſic ut 5 habeamus Novenarios, at 3 tantùm Famulos). Novenariorum præſtantia, ſimilis ferè horum, quos in ludo Hiſpanico *Jeu de l'Hombre* dicto *Matadors*, latrones, homicidas ſive ſicarios appellant, in eo conſiſtit, ut cujusvis dignitatis & ſpeciei chartis accenſeantur: ſic duo Novenarii cum Monade, aut unus cum duabus juncti tres Monadas, ſeu *Trigam* (*un Tricon*) Monadum efficiunt: unus, duo vel tres Novenarii ſtipati tribus, duobus unove Regibus *Quadrigam* Regum conſtituunt: unus duove Novenarii in conſortio trium duorumve ejuſdem ſpeciei foliorum, quaterna illius ſpeciei exhibent, ex. gr. quaterna corda, ſpicula, trifolia &c. cujuſmodi chartarum complexio *Fluvius*, ein Fluß/ dici conſuevit, qui præterea numero punctorum æſtimatur; numerantur autem pro Novenario aut Monade puncta 11, pro cæterarum dignitatum chartis ſingulis puncta 10. Modus ludendi talis:

Singulis colludentium ordine bina diſtribuuntur folia, quibus clam inſpectis liberum eſt primo arbitrariam pecuniæ ſummam deponere, quocum ſi congredi velit alter, tantundem deponet, aut etiam

etiam, ubi viſum fuerit, inſuper adjiciet aliquid; quod pariter prior ſuperaddere tenetur, ſi depoſiti ſui jacturam facere nolit. Quo facto ſingulis, qui ludum ingreſſi ſunt, bina rurſum folia exhibentur, ſed omnium palàm oculis in menſâ expoſita; ſic ut cujuſque colluſoris ludus cæteris ex parte detectus, ex parte occultus ſit: tum verò de novo pecuniâ certare incipiunt, aucto, ut antea, alternis depoſito, provocatoque pluris ſemper licitandi poteſtate conceſſâ. Tandem aperit unusquiſque ludum ſuum colluſoribus, & qui cæteris potiorem habere deprehenditur, univerſo depoſito potitur. Potior autem eſt Quadriga Fluvio, & Fluvius Triga, quibus omnibus præfertur Quadriga Novenariorum. In Trigis & Quadrigis cæteris dignitatis ordo, in Fluviis punctorum numerus attenditur; ſic Triga vel Quadriga Monadum prævalet Trigæ vel Quadrigæ Regum, & Fluvius 43 punctorum alium 42 antecellit. Si nemo colluſorum Triga, Quadriga Fluviove ſit inſtructus, is qui plura ejuſdem ſpeciei puncta numerare poteſt, depoſito potitur. In caſu verò omnimodæ paritatis ludorum, ut cùm duo ejuſdem dignitatis Trigam aut Quadrigam, vel totidem punctorum Fluvium numerant, is alteri victoriam præripit, qui ordine prior eſt, ſeu qui primus chartas accepit.

Quibus ſuppoſitis & intellectis poterit quilibet colluſorum viſis primis ſuis duobus foliis calculo ſubducere, quæ ſibi ſit expectatio ad vincendum, indeque colligere, quis in certando modus ſit tenendus: quanquam enim licitationem non ſemper qualitati ludi proportionare debeat, ne colluſoribus ludum ſuum prodat (quandoquidem anima hujus ludi eſt ſimulatio, & hîc præcipuè in uſum vertendum, quod Galli vocant, *faire bonne mine à mauvais jeu*, ut alii, quibus melior fortaſſe ludus contigit, fictâ hujus confidentiâ decepti ab ultrà-certando abſterreantur) negari tamen non poteſt, quin prævia expectationis cognitio ad ipſam hanc ſimulationem moderandam & gubernandam adjumentum haud leve conferre poſſit. Nos calculi ſpecimen in unico tantùm exemplo exhibebimus;

Quoniam obſervatum olim mihi multoties recordor, hunc cui ab initio duo Novenarii obtigerant, non obſtante hâc ludi bonitate perdidiſſe, cupidus ſum ſciendi, quanto majorem talis vincendi quàm

perdendi

perdendi ſpem habeat. Atque ut quæſtionem plene determinem, pono me ordine priorem eſſe colluſore, mihi primis duabus chartis duos obtigiſſe Novenarios, alterique unum (ſive quod hoc ex provocationis meæ acceptatione præſumam, ſive quod aliunde mihi conſtet) & quærendam eſſe utriuſque expectationem.

Primò conſidero omnes poſſibiles ſtatus, in quos ludum proſequendo pervenire poſſum. Fieri autem poteſt, ut reliquæ duæ, quas expecto, pagellæ afferant mihi (prout in ſubjuncta Tabula ordine ſub lit. A videre eſt,) vel duos alios Novenarios, vel Novenarium cum Monade, Rege, Hera, Famulo, Denariove: vel duas Monadas, duos Reges, H. F. Denariosve: vel Monadem cum Rege, H. F. D-riove: Regem cum H. F. D-riove: Heram cum Famulo Denariove: Famulum denique cum Denario; easque dignitates vel ambas ejuſdem ſpeciei; vel diverſarum ſpecierum, easque rurſum tales, ut vel alterutra ſit ex ſpecie trifoliorum, vel neutra: ob famulum enim trifolii, qui Novenariis accenſetur, diſparitas hæc ſortes aliquantulum variat.

Deinde examino, quot caſibus ſingula horum evenire poſſint, conſiderando, quòd poſt acceptos à me duos Novenarios & unum à Colluſore, ſuperſunt folia 21, interque illa duo adhuc Novenarii, 4 Monades, totidem Reges, Heræ, Denarii, ac 3 Famuli, (nam etiamſi colluſor duo quoque folia acceperit, eoque propriè non niſi reſtent 20; quoniam tamen alterum illorum mihi ignotum eſt, tantundem hoc valet reſpectu neſcientiæ meæ, acſi non accepiſſet, egoque ad duo qualiacunque ex 21 foliis æqualem expectationem haberem.) Quibus perpenſis facillimum eſt enumerare caſus: caſus enim tot ſunt, quot foliorum reſiduorum combinationes. Poſſunt autem Novenarii reſidui ambo ſimul non niſi ſemel accipi: Novenarius cum Monade aut Rege &c. bis quater ſeu octies, cum Famulo tantùm bis ter ſeu ſexies combinari poteſt: Binarum autem Monadum aut binorum Regum &c. ſunt ſex, binorum Famulorum tres electiones: Porrò monas cum Rege, aut Hera &c. ejusdem ſpeciei, pro numero ſpecierum quater; Monas aut Rex &c. cum Famulo ter tantùm ſumi poteſt. Rurſum Monadis & Regis &c. diverſarum ſpecierum, quarum tamen altera ſit trifoliorum, ſex ſunt acceptiones;

quando

quandoquidem Monas trifolii cum ſingulis Regibus, & Rex trifolii cum ſingulis Monadibus trium reliquarum ſpecierum conjungi poteſt: quemadmodum etiam Monas trifolii cum Famulo alterius ſpeciei ter conjungitur. Monas denique cum Rege, Herâ, Famulo &c. aut alia duo folia datarum differentium dignitatum & diverſarum ſpecierum (ſed excluſo trifolio) ſexies combinantur; cùm ſingulæ ex. gr. trium Monadum cum ſingulis reliquarum duarum ſpecierum Regibus ſemel compingi poſſint. Et ſic facili negotio combinationum ſeu caſuum numeri ſinguli determinabuntur, quemadmodum in media columna ſub lit. B notati ſunt. Eorum omnium ſumma vel aggregatum reperitur 210 $\infty \frac{21.20}{1.2}$ quantus etiam eſt numerus binionum in chartis 21.

Tertiò calculo perquiro, quæ meæ vel colluſoris ſint expectationes in ſingulis recenſitis ſtatibus; quem in finem conſidero ante omnia, quòd exhibitis mihi duobus aliis foliis reſidua ſunt folia 19, quorum tria colluſori debentur; ſic ut ejus ludus tot variationibus obnoxius ſit, quot terniones in rebus 19 habentur, nempe $\frac{19.18.17}{1.2.3}$ ∞ 969, è quibus quot ipſi faveant, quot adverſentur, in quavis ludi mei conſtitutione porrò explorandum eſt; Patet autem, quòd ſive duobus meis Novenariis accedant duo alii Novenarii, ſeu Novenarius unus cum Monade, neceſſario perdere debet colluſor; tunc enim habebo Quadrigam Novenariorum aut Monadum, & ego ſum ex hypoth. ordine prior colluſore, qui Monadum tantùm Quadrigam ad ſummum conſequi poteſt. Sin Novenariis meis accedat Novenarius cum Rege, habebo Quadrigam Regum, & vinci poſſum à colluſore, ſi hic Quadrigam Monadum obtineat; unde cùm in reſiduis 19 foliis lateant 5 (unus videl. Novenarius & 4 Monades) quorum terna qualiacunque addita Novenario, quem habere præſumitur colluſor, Monadum Quadrigam efficiunt; atque in rebus 5 contineantur terniones 10, ſequitur colluſorem meum in variationibus 969 habere 10 ad vincendum & cæteros ad perdendum; id quod ipſi ſortem parit $\frac{10}{969}$. Si cum Novenario Hera mihi contingat, habebo Quadrigam Herarum, & vincere poteſt colluſor, ſive Monadum ſive Regum Quadrigam conſequatur; quare præter 10 caſus priores nunc alios 10, h. e. 20 ad

vincendum habet, id quod ipſi valet $\frac{20}{969}$. Similiter ſi cum Novenario Famulum obtineam, præter 20 caſus memoratos vincere potoſt colluſor 10 aliis, quibus quadrigam Herarum conſequitur; unde jam ejus ſors exiſtit $\frac{30}{969}$. Sed ſi Novenarius meus Denario ſtipetur, ſic ut inſuper Quadriga Famulorum colluſorem victorem reddere poſſit, accedentibus ad priores 30 caſus duntaxat 4 aliis, ſors ejus fiet $\frac{34}{969}$; quippe cùm in foliis 4 (quæ ipſius Novenario Trigam Famulorum addere poſſunt) tribus ſcil. Famulis & uno reſiduo Novenario non niſi terniones 4 habentur.

	A	B	C
	2 N	1	0
	N & M	8	0
	N & R	8	10
	N & H	8	20
	N & F	6	30
	N & D	8	34
	2 M	6	0
	2 R	6	20
	2 H	6	40
	2 F	3	60
	2 D	6	70
Ejusd. ſpec.	M & R	4	70
	M & H	4	70
	M & F	3	74
	M & D	4	70
	R & H	4	96
	R & F	3	100
	R & D	4	96
	H & F	3	100
	H & D	4	96
	F & D	3	100

♃

♃

Diverſ. ſpec. quarum una trifol.	M & R	6	153
	M & H	6	153
	M & F	3	157
	M & D	6	153
	R & H	6	309
	R & F	3	313
	R & D	6	309
	H & F	3	445
	H & D	6	441
	F & D	3	553
neutra trifol.	M & R	6	148
	M & H	6	148
	M & F	6	152
	M & D	6	148
	R & H	6	304
	R & F	6	308
	R & D	6	304
	H & F	6	440
	H & D	6	436
	F & D	6	548
		210	969

Quòd

Quòd si Novenariis meis duæ Monades acceſſerint, rurſus infallibiliter perdet colluſor: ſi duo Reges, ipſe vincere cum Monadum Quadriga poteſt; ſed propter 4 Monadas & duos nunc reſiduos Novenarios, i. e. ob ſex folia, quorum terniones omnes Novenario colluſoris juncti Quadrigam hanc conſtituere poſſunt, viginti tunc ad vincendum caſus habet. Quibus ob ſimilem rationem accedunt alii 20, ſi loco Regum duas Heras: & rurſus 20, ſi duos Famulos adeptus fuero. Sed ſi duos Denarios accepero, præcedentibus tantùm ſuperaddendi caſus 10; propterea quia ſunt folia ſolum 5 (Famuli ſcil. tres & duo reſidui Novenarii) quorum terniones Famulorum Quadrigam colluſori advehere poſſunt. Unde expectationes illius ordine habentur $\frac{20}{969}$, $\frac{40}{969}$, $\frac{60}{969}$ & $\frac{70}{969}$.

Porrò, ſi Novenariis meis jungatur Monas cum Rege, Hera, Famulo, Denario homogeneo, habebo Fluvium 43 punctorum, & vincet colluſor cum Quadriga qualicunque, non aliter: ſin iis accedat Rex cum Hera, Famulo, Denariove homogeneo; aut Hera cum Famulo &c. habebo duntaxat Fluvium 42 punctorum; & vincet colluſor cum qualicunque Quadriga, atque inſuper cum Fluvio 43 punctorum. Si vero mihi cadat Monas cum Rege heterogeneo &c. habebo ſolummodo Trigam Monadum, & vincere poteſt alter cum Quadriga pariter ac Fluvio qualicunque; cújus proinde expectationes pro ſingulis his ſtatibus pari modo ſeorſim inveſtigantur, ſed eo majori ſubinde labore, quo major colluſori vincendi ſpes alluceſcit. Unde cùm omnia minutatim proſequi nimis prolixum foret, operationem apponam pro ultima tantùm hypotheſi, quâ pono mihi cecidiſſe Famulum cum Denario alterius ſpeciei (putà Famulum cordium cum Denario ſpiculorum) adeoque nonniſi Famulorum Triga me inſtructum eſſe. Colluſorem itaque victorem reddet Quadriga quæcunque & Fluvius quilibet, nec non Triga Monadum, Regum atque Herarum: Quadrigarum caſus determino, conſiderando, reſidua 19 folia conſiſtere præter 2 N in 4 M, 4 R, 4 H, 2 F & 3 D, h. e. (Novenariis ad ſingulas dignitates adjunctis) in 6 M, 6 R, 6 H, 4 F & 5 D: horum namque terniones oſtendunt, obtingere ipſi poſſe Quadrigam Monadum caſibus 20, Regum & Herarum totidem. Famulorum caſibus 4 & Denariorum 10, quorum omnium ſumma dat caſus 74. Fluviorum porrò multitudinem ita exploro:

 Attendo,

Attendo, quòd in reliquis 19 foliis præter 2 N reperiuntur 4 ſpicula, 5 lateres, 4 corda & 4 trifolia; & quòd ad Fluvium conſtituendum ultra Novenarium, quo colluſorem jam compotem eſſe præſumo, requiruntur vel terna ejusdem ſpeciei folia, vel ſaltem bina, aſſumto unà Novenariorum reſiduorum alterutro: indeque concludo, Fluviorum numerum æquari numero ternionum in omnibus ſpeciebus, unà cum numero binionum bis ſumto; quare cùm terniones omnes ſint 4 + 10 + 4 + 4 ∞ 22, & biniones omnns 6 + 10 + 6 + 6 ∞ 28, ſequitur, ſummam caſuum ad Fluvios fore 22 + 28 + 28 ∞ 78. Ad Trigas denique quod attinet, earum numerum inire poſſum, ſi perpendam, quòd ad Trigam Monadum (Regum ſive Herarum) conſtituendam, Novenario quo jam pollet colluſor jungendæ vel binæ Monades (Reges aut Heræ) vel ſingulæ unà cum aſſumto Novenariorum reſiduorum alterutro: ſi binæ junguntur, quartum folium poterit eſſe quodlibet ex reliquis 13; adeo ut, cùm 4 Monades (Reges, Heræ) ſexies poſſint binæ accipi, ſexies quoque 13, i. e. 78 hinc variationes oriantur: ſi una ſola Monas (Rex aut Hera) ei jungitur cum Novenariorum reliquorum alterutro, pro quarto folio accipi poterit unumquodvis ex reliquis ſpeciebus, quod ſit inferioris dignitatis; nimirum cum Monade laterum ſigillatim poſſunt accipi 9 folia, & cum ſingulis reliquis 10; cum Rege laterum 6, & cum ſingulis reliquis 7; cum Hera laterum 3, & cum ſingulis reliquis 4; unde Monadum caſus emergunt 39, Regum 27, Herarum 15, qui numeri ob duos reſiduos Novenarios bis ſumpti & poſtmodum ſeorſim additi ſupra inventis 78 aliis variationibus producunt Trigas Monadum 156, Regum 132, & Herarum 108, quæ rurſus collectæ faciunt 396. Quoniam igitur repertum nobis eſt, omnes Quadrigarum caſus eſſe 74, Fluviorum 78, & Trigarum, quæ quidem colluſorem victorem reddere poſſunt, 396, ſequitur quòd conflatis in unam ſummam his numeris aggregatum 548 deſignet omnes in univerſum caſus, quibus ille victoria potiri poſſit; adeò ut ejus ſors exiſtat $\frac{548}{969}$, quemadmodum etiam ſupra in laterculo ſub lit. C. videre eſt, ubi ordine notati habentur numeratores fractionum, quæ exprimunt expectationes colluſoris in quovis ludi mei ſtatu, quarumque omnium communis denominator exiſtit 969.

His

His verò inventis, ut exploretur ſors, de qua principaliter quæſtio mota fuit, quam nimirum habemus priusquam ego poſtrema duo folia accipiam, nil ſupereſt aliud, quàm ut numeros caſuum columnæ B ducamus in numeratores reſpondentes columnæ C, & ſummam productorum dividamus per productum numeri omnium caſuum 210 in communem denominatorem 969: vel, quod brevius, ut numeratores omnes col. C, quibus æqualis caſuum numerus in col. B reſpondet, prius addantur, ac tum ſumma per illum caſuum numerum multiplicetur; tandemque productorum omnium aggregatum dividatur, ut antea. Et ſic quidem reperio, colluſoris mei ſortem eſſe $\frac{3.1902 + 4.498 + 6.4614 + 8.64}{210 \text{ in } 969} \infty \frac{35894}{203490} \infty \frac{17947}{101745}$; unde mea fiet $\frac{83798}{101745}$, paulo minùs quàm 5^{ies} potior altera.

Cæterum examinanti Tabellam primo obtutu multa alia Theoremata ultro ſe offerunt, qualia ſunt hæc: Quòd ad æquam perveniam expectationem per Novenarium cum Hera, atque per duos Reges; item, per duos Denarios, atque per Monadem cum Rege, Hera, Denariove homogeneo: Quòd optabilior mihi ſit Novenarius cum Famulo Denariove, quàm duæ Heræ: Quòd duo differentium dignitatum & ſpecierum folia ſemper tantillo præſtabiliora ſint, ſi neutrum, quàm si alterutrum trifolium foret: Quòd Hera cum Denario alterius ſpeciei meam, Famulus cum Denario colluſoris conditionem paulo potiorem reddat &c.

Et hæc quidem omnia ita ſe habent in hypotheſi, quæ ſupponit duos mihi ab initio Novenarios, unum colluſori obtigiſſe; nam si de neutro colluſoris folio mihi conſtare ſupponatur, aliæ prodibunt expectationes & alia Tabula, quam induſtrius Lector mutatis mutandis ſimili modo concinnabit. Inveniet autem. si calculum ritè ſubduxerit, ſortem meam hoc caſu ad colluſoris ſortem ſe habere, ut 346988 ad 26077, adeoque nunc plus quam tredecies hâc meliorem eſſe.

Animus præterea fuerat, quaſdam alias quæſtiones, de quibus frequens inter colluſores ſermo miſcetur, ſolutas hîc tradere; ex. gr. An præſtabilior ſit ab initio ludi Novenarius cum Famulo Dena-

tiove; an vero duæ Monades? Aut uter duorum, quorum alter ab initio duas obtinuit Monadas, alter Novenarium cum Famulo Denariove, potiorem vincendi ſpem habeat? & ſimiles. Sed quia futilibus nimiam jam impendiſſe operam videri poſſum, hæc & alia rerum harum curioſo Lectori indaganda & calculo definienda relinquo.

PROBLEMA XIX.

In quolibet Aleæ genere, ſi ludi Oeconomus ſeu Diſpenſator (le Banquier du Jeu) *nonnihil habeat prærogativæ in eo conſiſtentis, ut paulo major ſit caſuum numerus quibus vincit quàm quibus perdit; & major ſimul caſuum numerus, quibus in officio Oeconomi pro ludo ſequenti confirmatur, quàm quibus œconomia in colluſorem transfertur. Quæritur, quanti privilegium hoc Oeconomi ſit æſtimandum?*

Sit in quolibet aleæ jactu numerus caſuum quibus vincit œconomus, ad numerum caſuum quibus perdit, in ratione p ad q, majoris ad minus: item numerus eorum quibus ipſi œconomia pro jactu ſequenti confirmatur, ad numerum horum quibus illa in colluſorem transfertur, in ratione m ad n, rurſum majoris ad minus. Evidens eſt, ſi ſolius præſentis, nulla ſequentis ludi haberetur ratio, fore (propter p caſus ad depoſitum 1, & q ad 0) ſortem œconomi $\frac{p}{p+q}$, colluſoris $\frac{q}{p+q}$, & ambas in ratione p ad q. Sed ſi ad futuros quoque ludos reſpiciatur, res plus obſcuritatis habet, nec obvium ſtatim eſt, quomodo prærogativa præſentis ludi & ſpes ad

præ-

prærogativam ſequentis conjunctim ſint æſtimandæ; ac proinde facilis in paralogiſmos prolapſus eſt, niſi probè advertatur. Memini me aliquando ſic argumentatum fuiſſe: Si idem perpetuò maneret œconomus, ſemper eandem haberet prærogativam ſeu ſortem, quam ratio p ad q definit; igitur quando periculum eſt amittendæ œconomiæ, hactenus pejor ejus conditio cenſenda videtur. Sit hæc x, & colluſoris y; fiet (ob p caſus ad 1, q ad 0, m caſus ad permanendum in ſtatu œconomi, & n caſus ad acquirendum ſtatum colluſoris) $x \infty \frac{p+mx+ny}{p+q+m+n}$, & ſimili modo ſors colluſoris $y \infty \frac{q+my+nx}{p+q+m+n}$; quibus æquationibus debitè inter ſe collatis habetur $x.y::p+n.q+n$ minor, uti collegeram, quàm p ad q. Alia vice ſic arguebam: Si œconomo debeatur $\frac{p}{p+q}$, colluſori $\frac{q}{p+q}$ depoſiti, ſintque m caſus quibus ille in ſtatu œconomi confirmatur, & n caſus quibus in ſtatum alterius tranſit, erit ſors ejus $\frac{m.p:\overline{p+q}+n.q:\overline{p+q}}{m+n} \infty \frac{mp+nq}{\overline{m+n}\cdot\overline{p+q}}$, relinquiturque alteri $\frac{mq+np}{\overline{m+n}\cdot\overline{p+q}}$; ſic ut ratio ſortium fiat, ut $mp+nq$ ad $mq+np$, rurſum minor quàm p ad q, etsi diverſa ab alterâ $p+n$ ad $q+n$. Vix autem ita collegeram, cùm utrumque hoc ratiocinium rurſus ceu præpoſterum & fallax rejeci, quippe cui ſummè videbatur ἄτοπον, ut major probabilitas retinendi quàm amittendi munus œconomi minuere potiùs quàm augere dicatur prærogativam œconomiæ annexam: quare aliquandiu eo propendebam, ut crederem prærogativam hanc compoſitam eſſe debere ex utraq; ratione p ad q, & m ad n; adeoq; ſortem œconomi ad colluſoris ſortem eſſe in ratione pm ad qn, majore quàm p ad q, vel m ad n ſeorſim. Verùm nec iſtud aſſertum evidentiæ quicquam habere ſenſi, quin & reapſe à vero abludere deprehendi, poſtquàm genuinum ſolvendi modum reperiſſem. Nolo autem oſtendere, in quo laborent allata ratiocinia. ad veriorem potiùs ſine morâ ſolutionem tranſiturus, præ cujus jubare ſpurium illorum lumen mox ultrò diſpariturum puto.

Hanc qui legitimè inveſtigare cupit, ad duo advertere debet: unum, ut per Coroll. 5. Propoſ. 3. part. 1. determinet, quantum

œcono-

œconomo non ex toto depoſito, ſed ex ſolâ colluſoris pecunia debeatur: alterum, ut hanc illi debitam portionem pro ſingulis ſubſequentibus jactibus ſive ludis ſeorſim exploret, quo omnium additione totalis expectatio pateſcat. Poſito itaque Aleatores ita inter ſe conveniſſe, ut poſt quemlibet jactum victus victori tradere teneatur a, liquet, habere œconomum in primo jactu p caſus ad lucrandum a, & q caſus ad perdendum a, h. e. ad acquirendum $-a$; adeoque partem ipſi debitam ex colluſoris pecunia eſſe $\frac{p.a+q.-a}{p+q} \infty \frac{pa-qa}{p+q}$ ſeu (factis $p-q \infty r$, & $p+q \infty s$) $\frac{ar}{s}$: quemadmodum contra colluſor, ob q caſus ad lucrandum a, & p ad perdendum, habere cenſetur $\frac{-ar}{s}$. Et quoniam præterea œconomus in primo jactu habet m caſus, quibus privilegium œconomiæ retinet, h. e. quibus acquirit pro jactu ſecundo $\frac{ar}{s}$; & n caſus quibus illud amittit, h.e. quibus acquirit $\frac{-ar}{s}$; debebitur etiam ipſi ex pecunia colluſoris a ſecundi jactus

$$\frac{m.ar:s+n.-ar:s}{m+n} \infty \frac{mar-nar}{m+n.s} \infty$$

(verſis $m-n$ in t, & $m+n$ in v) $\frac{art}{sv}$: & colluſori viciſſim ex pecunia œconomi $\frac{-art}{sv}$, id eſt, propter ſignum — debebit ille huic tantundem. Similiter ob eoſdem m & n caſus primi jactus, quibus œconomia pro jactu ſequenti vel confirmatur œconomo, vel ab ipſo aufertur, fiet per modo oſtenſa ipſius jus in pecuniam a tertii jactus, ceu à ſecundo ſecundi,

$$\frac{m.art:sv+n.-art:sv}{m+n} \infty \frac{m-n.art}{m+n.sv} \infty \frac{artt}{svv};$$

& colluſoris viciſſim $\frac{-artt}{svv}$. Atque ſic porrò eadem ratione invenitur deberi œconomo de pecunia jactus 4ti, ceu à ſecundo tertii,

$$\frac{m.artt:svv+n.-artt:svv}{m+n} \infty \frac{art^3}{sv^3};$$

& de pecunia jactus 5ti $\frac{art^4}{sv^4}$ &c. colluſori verò $\frac{-art^3}{sv^3}$, $\frac{-art^4}{sv^4}$ &c. & ſic deinceps, quouſque fuerit opus. Collectis igitur in unam ſummam portionibus, quæ œconomo pro ſingulis ſucceſſivè jactibus debentur, fiet ejus ex-

pectatio

pectatio totalis $\frac{ar}{s}+\frac{art}{sv}+\frac{artt}{svv}+\frac{art^3}{sv^3}+\frac{art^4}{sv^4}$ &c. expreſſa vid. per ſeriem quantitatum geometricè progredientium in ratione v ad t, eo uſque continuandam, donec numerus terminorum æquetur numero jactuum ſeu luſionum, de quo initio inter Aleatores convenit, aut quem alias ante diſceſſum eorum abſolvi poſſe præſumitur. Hunc numerum ſi vocemus z, erit ultimus ſeriei terminus $\frac{art^{z-1}}{sv^{z-1}}$, & ſumma totius ſeriei $\frac{ar}{s}$ in $\frac{v^{z}-t^{z}:v^{z-1}}{v-t}$ ∞ $\frac{ar}{s}$ in $\frac{\overline{m+n}^{\,z}-t^{z}:v^{z-1}}{2n}$.

Coroll. 1. Si differentia inter m & n, adeoque ratio $\frac{t}{v}$ minuſcula ſit, aut ſaltem numerus luſionum z majuſculus, pro ſumma inventa poterit ſcribi $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{2n}$ abſque ſenſibili exceſſu, evaneſcente vid. quantitate $\frac{t^{z}}{v^{z-1}}$, quippe ad v & t eo ordine proportionali, quem indicat numerus luſionum z unitate auctus. Quare tum valor totius prærogativæ œconomi, ad $\frac{ar}{s}$, id quod ipſi pro ſolo primo ludo deberetur, ferè ſe habet, ut $m+n$ ad $2n$.

Cor. 2. Si tempore exiguo magnus luſionum numerus poſſit abſolvi, œconomus autem à ludendo deſiſtere, alterique cuidam ſuam prærogativam vendere velit, accipiet ab ipſo $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{2n}$: ſi verò in luſu pergere, & œconomiam tantùm cum ſtatu colluſoris permutare cupiat, dabit ipsi colluſor, qui in œconomi munus ſuccedit, duplum, nempe $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{n}$; ſimplum enim ipsi deberet, ſi nunc à ludo omninò ceſſare vellent; ac deinde rurſus tantundem, si ludum redauſpicari, alterque ſibi œconomiam ſponte cedere cuperet.

Cor. 3. Si ſit $m \infty p$, & $n \infty q$, valor $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{2n}$ contrahitur ad $\frac{a\cdot\overline{p-q}}{2q}$, ejusque duplum $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{n}$ ad $\frac{a\cdot\overline{p-q}}{q}$.

PROBLEMA XX.

Æſtimatio ſortis in ludo chartarum, vulgò Capriludium, das Bockſpiel, *dicto.*

Uſus hujus ludi frequens inter noſtrates. Inſtituitur chartis luſoriis inter duos pluresve colluſores, quorum unus, qui contra cæteros decertat, & œconomi fungitur munere (der den Bock hat) poſtquam folia miſcuit, eorum ſyſtema in tot manipulos diſpeſcit, quot una ſecum colluſores adſunt; tum ſinguli horum ſingulos ſibi manipulos admoto pretio mercantur, poſtremum œconomo relinquentes, qui tandem inverſis manipulis ima eorum folia, præter quæ alia nulla conſiderantur, retegit. Quo facto his, quorum folia dignitate ſuperant folium œconomi, pendere tenetur œconomus tantum, quantum quisque aleæ expoſuit; ſed quibus folia cecidêre humilioris vel etiam paris dignitatis cum folio œconomi, illi depoſiti ſui jacturam patiuntur, cedente hoc contra in emolumentum victoris œconomi, qui ſuo præterea munere fungi pergit, quamdiu vel unicum colluſorum devicerit, nec officio œconomi exuitur, niſi ab omnibus omninò colluſoribus fuerit ſuperatus.

His poſitis & intellectis, ſi valor expectationis œconomi ſit inveſtigandus, determinandæ tantùm reſtant rationes $p:q$, $m:n$, hoc eſt, definiendum quot caſibus vincere & quot perdere queat œconomus in quavis luſione; item quot caſibus ille jus œconomi ſervare, quot amittere poſſit: cætera enim ex præced. Problemate repetuntur. Sit itaque numerus ſpecierum, in quas diviſum eſt chartarum ſyſtema, f; & numerus dignitatum in quavis ſpecie, g; adeoque univerſus foliorum numerus fg. Unde

1. *Si duo tantùm fiunt manipuli*; patet, ambo eorum folia ima toties variari poſſe, quot biniones in univerſis foliis fg continentur, nempe $\frac{fg.\overline{fg-1}}{2}$. Horum binionum nonnulli ejusdem, alii differentium dignitatum chartis conſtant, quorum numerus ſeorſim ſic initur: Quoniam uniuscujusque dignitatis folia f biniones recipiunt $\frac{f.\overline{f-1}}{2}$, & dignitatum numerus eſt g; idcirco numerus omnium binionum

nionum, qui folia exhibent iſodynama ſive ejuſdem dignitatis, eſt $\frac{fg\cdot\overline{f-1}}{2}$, quo ſubducto ab univerſis $\frac{fg\cdot\overline{fg-1}}{2}$, relinquitur $\frac{fg\,\overline{fg-f}}{2}$ $\infty\ \frac{ffg\cdot\overline{g-1}}{2}$ numerus binionum, qui differentium dignitatum foliis conſtant. Atqui cùm ambo folia ima ſunt iſodynama, utrumvis ſibi eligat colluſor, œconomus ex ludi præſcripto non poteſt non vincere, id quod ipſi valet 1; ſin verò diverſis pollent dignitatibus, uterque æqualem habet ad vincendum & perdendum expectationem, quandoquidem colluſor æquè facilè humilioris ac altioris dignitatis folium eligere poteſt, id quod utrivis valet $\frac{1}{2}$. Sunt igitur œconomo $\frac{fg\cdot\overline{f-1}}{2}$ caſus ad 1, & $\frac{ffg\cdot\overline{g-1}}{2}$ ad $\frac{1}{2}$, quod facit $\frac{fg+f-2}{2fg-2}$; & relinquitur ejus colluſori $\frac{fg-f}{2fg-2}$: hoc verò per Annot. ad lit. I. Prop. XI. part. 1. tantundem eſt, acſi haberet œconomus $fg+f-2$ caſus ad lucrandum, & $fg-f$ caſus ad perdendum; quare conſtat eſſe $p.q::fg+f-2.fg-f$. Et quoniam is præterea retinet pro ludo ſequenti jus œconomi, quoties vincit; eoque excidit quoties perdit, patet etiam hîc eſſe $m \infty p$, & $n \infty q$.

Nota, ſi ſit numerus ſpecierum $f \infty 4$, fit $p.q\,(::m.n)$ $::2g+1.2g-2$; quæ rurſus poſito numero dignitatum $g \infty 9$ reducitur ad $p.q::19.16$. Hinc ſumto, quòd colluſor pro ſingulis luſionibus deponere ſoleat a, debebitur œconomo per præced. Probl. ejuſque Coroll. 3. pro primo ludo $\frac{ar}{t} \infty \frac{a\cdot\overline{p-q}}{p+q} \infty \frac{3}{35}a$, pro omnibus ludis $\frac{a\cdot\overline{p-q}}{2q} \infty \frac{3}{32}a$, exceſſu non ſuperante unam centies millioneſimam partem ipſius a in ludis tantùm 7. Si igitur œconomus à ludo ceſſare velit, tertio cuidam prærogativam ſuam vendere poterit pretio $\frac{3}{32}a$; at si ludum continuare, & jus tantùm ſuum in colluſorem transmittere malit, accipiet ab ipſo duplum, nempe $\frac{3}{16}a$.

2. *Si tres ſiunt manipuli*, totidemque unà cum œconomo ſunt colluſores, liquet, duorum quorumvis manipulorum folia infima tot rurſum variationibus obnoxia fore, quot biniones in univerſo chartarum numero continentur, cùm tertius manipulus conſiderari poſſit

 acſi

aesi abeſſet, ejusque folia omnia cæteris manipulis adhuc eſſent permiſta: quare œconomo tot erunt caſus, quibus utrumvis ſuorum colluſorum ſeorſim ſuperet, aut ſuperetur ab ipſo, quot erant in hypotheſi duorum tantùm manipulorum; hoc eſt, manebit, ut antea, $p . q :: fg + f - 2 . fg - f ::$ (in caſu $f \infty 4$) $2g + 1 . 2g - 2$. Sed variat ratio m ad n, pro numero colluſorum ſeu manipulorum, quorum quo plures ſunt, hoc difficiliùs œconomum munere ſuo excidere permittunt. Pro tribus manipulis conſidero, eorum folia ima tot variationes ſubire poſſe, quot terniones recipiunt omnia folia $4g$ (ſic pono pro fg, conciſioris calculi ergò, & quòd præter quaternarium non alius ſpecierum numerus ſit in uſu) nempe $\frac{4g . 4g - 1 . 4g - 2}{1 . 2 . 3} \infty \frac{32g^3 - 24gg + 4g}{3}$. Horum ternionum nonnulli ex tribus foliis ejusdem dignitatis, alii ex duobus ejusdem cum tertio diverſæ dignitatis, alii denique ex trium differentium dignitatum foliis conſtant: nimirum, cùm cujusq; dignitatis folia 4, terniones admittant 4, biniones 6, & dignitatum numerus ſit g, erit numerus omnium ternionum ejusdem dignitatis $4g$, & binionum $6g$, quorum rurſus binionum quilibet ſecum aſſumere poteſt quodlibet ex reliquarum $g - 1$ dignitatum foliis $4g - 4$; quod efficit terniones $24gg - 24g$, quorum una medietas $12gg - 12g$ duobus foliis iſodynamis tertium altioris, altera medietas tertium inferioris dignitatis folium adjunctum habet; unde ſubductis $4g$ & $24gg - 24g$ ex univerſo ternionum numero $\frac{32g^3 - 24gg + 4g}{3}$ remanent terniones $\frac{32g^3 - 96gg + 64g}{3}$, qui omnes trium differentium dignitatum folia exhibent.

Jam autem ſi tribus manipulorum foliis infimis ejuſdem dignitatis eſſe contigerit, œconomus ex ludi præſcripto œconomia excidere nequit, utrumq; ſors tulerit: neq; etiam, cum duobus ejusdem, tertium elevatioris dignitatis fuerit adjunctũ; at ſi tertium hoc humilioris fuerit gradus, vel etiam omnia tria folia dignitatis gradu diſcrepent, œconomus uno caſu jus ſuum amittere (ſi nempe infimi gradus folium ſibi obvenerit,) duobus ſervare poteſt, quod ipſi valet $\frac{2}{3}$. Sunt igitur ipſi $4g$ caſus ad 1, & rurſus $12gg - 12g$ caſus ad 1, nec non $12gg - 12g$ ad $\frac{2}{3}$, iterumque

32g

$\frac{32g^3 - 96gg + 64g}{3}$ ad $\frac{2}{3}$; id quod facit $\frac{16gg - 3g - 4}{24gg - 18g + 3}$, & relinquuntur ad complendam unitatem $\frac{8gg - 15g + 7}{24gg - 18g + 3}$; quod tantundem eſt, acſi diceretur habere $16gg - 3g - 4$ caſus ad ſervandam, & $8gg - 15g + 7$ caſus ad amittendam œconomiam; adeò ut inventa ſit ratio $m . n :: 16gg - 3g - 4 . 8gg - 15g + 7$.

Nota, ſi g determinetur ad 9, erit $p:q \infty 19:16$, & $m:n \infty 253:104$. Unde poſito, quòd alter colluſorum depoſuerit a, & alter b, debebitur œconomo per præced. Probl. ejusque Coroll. $\frac{a . \overline{p - q} . \overline{m + n}}{\overline{p + q} . 2n} \infty \frac{153}{1040} a$ reſpectu prioris, & $\frac{b . \overline{p - q} . \overline{m + n}}{\overline{p + q} . 2n} \infty \frac{153}{1040} b$ reſpectu poſterioris colluſoris; adeoque reſpectu utriuſq; $\frac{153}{1040} \overline{a + b}$, non excedente una centies milleſimâ parte ipſius $a + b$ in ludis undecim. Quapropter œconomus quarto cuidam, qui in locum ſuum ſuccedere cupiet, privilegium ſuum vendet pretio $\frac{153}{1040} \overline{a + b}$; alterutri verò colluſorum, quicum vices ſuas permutare volet, putà illi qui depoſuit a, pretio $\frac{153}{1040} \overline{2a + b}$; nam deberetur ipſi primo per modo dicta $\frac{153}{1040} \overline{a + b}$, ſi ludus nunc abrumperetur; ac deinde, ſi reaſſumeretur, adhuc $\frac{153}{1040} a$, quandoquidem cedendo alteri œconomiam ludi, ſe debitorem ejus pro hac ſumma conſtituit.

3. *Si quatuor conſtituuntur manipuli*, totidemque cum œconomo habentur colluſores, tot rurſum caſus præſtò ſunt, quibus ille unumquemque ſuorum colluſorum ſeorſim vincat aut vincatur ab ipſo, quot erant in duabus præcedd. hypoth. quod idem etiam intellige de quovis manipulorum numero, cùm certè bini ipſorum quivis conſiderari ſemper poſſint, acſi præter ipſos nulli adeſſent; unde eadem perpetuo manebit ratio $p:q \infty 2g + 1 : 2g - 2$. Sed alteram rationem $m:n$, quam numerus manipulorum auget, ſic exploro: Conſidero, quòd quatuor manipulorum folia ima, *I*. vel omnia poſſint eſſe iſodynama ſive ejusdem dignitatis: *II*. vel tria ejusdem cum quarto aut altioris, *III*. aut humilioris dignitatis: *IV*. vel duo ejusdem, & reliqua duo pariter ejusdem, ſed diverſæ ab altera dignitatis: *V*. vel duo ejusdem cum reliquis duobus diverſarum dignita-

tum, quarum rurſus vel utraque poſſit eſſe eminentioris: *VI.* vel utraque ignobilioris: *VII.* vel una eminentioris, altera inferioris gradus: *VIII.* vel omni a deniq; quatuor folia differentium dignitatum.

Horum ſi Primum, Secundum, Quartum aut Quintum contigerit, œconomus ex ludi præſcripto muneris ſui jacturam facere nequit: ſi Tertium, VI, VII, vel VIIIvum acciderit, uno tantùn illud caſu amittere (ſi vid. infimæ dignitatis folium ſibi relinquatur) tribus caſibus retinere poteſt; quod ipſi proin dat $\frac{3}{4}$. Sed primum horum evenire deprehendo caſibus g; Secundum caſibus $8gg - 8g$: Tertium totidem: Quartum $18gg - 18g$: Quintum caſibus $16g^3 - 48gg + 32g$: Sextum & Septimum totidem: Ultimum deniq; caſibus $\frac{32}{3}g^4 - 64g^3 + \frac{352}{3}gg - 64g$, exiſtente numero omnium caſuum, ceu ſumma quaternionum in foliis univerſis, $\frac{32}{3}g^4 - 16g^3 + \frac{22}{3}gg - g$; quæ omnia, ut verbis parcam, induſtrio Lectori probanda relinquo. Quocirca habebit œconomus, g plus $8gg - 8g$ plus $18gg - 18g$ plus $16g^3 - 48gg + 32g$ caſus ad 1, & $8gg - 8g$ plus $16g^3 - 48gg + 32g$ plus iterum $16g^3 - 48gg + 32g$ plus $\frac{32}{3}g^4 - 64g^3 + \frac{352}{3}gg - 64g$ caſus ad $\frac{3}{4}$; id quod ipſi parit $\frac{24g^3 - 24gg + 3}{32g^3 - 48gg + 22g - 3}$ expectationis ad retinendum munus œconomi; & deeſt ad complendam unitatem $\frac{8g^3 - 24gg + 21g - 6}{32g^3 - 48gg + 22g - 3}$ pro metu amittendi muneris; ſic ut cenſenda ſit ratio $m.n :: 24g^3 - 24gg + 3 . 8g^3 - 24gg + 22g - 6$.

Nota, quòd ſi g determinetur ad 9. fiet $p.q :: 19.16$, & $m.n :: 15555.4080 :: 61.16$. Sumto itaque, quòd unus colluſorum depoſuerit a, alter b & tertius c, debebitur œconomo per præc. Probl. ejusque Coroll. $\frac{p-q.m+n}{p+q.2n}\overline{a+b+c} \infty \frac{33}{160}\overline{a+b+c}$, non una decies milleſimâ parte ipſius $a+b+c$ minus in ſolis 1 ludis. Quocirca si quinto cuidam locum ſuum cedere velit œconomus, ipſe à ludo ceſſaturus, venundabit illi privilegium œconomi pretio $\frac{33}{160}\overline{a+b+c}$; at si, continuaturus ludum, cum colluſorum

quodam

quodam ſortem ſuam commutare cupiat, accipiet ab ipſo vel $\frac{33}{160}$ $\overline{2a+b+c}$, vel $\frac{33}{160}\,\overline{a+2b+c}$, vel $\frac{33}{160}\,\overline{a+b+2c}$, prout is depoſuerit vel a, vel b, vel c.

Atque haud abſimiliter determinari poterit valor prærogativæ œconomi, si plures ponantur manipuli & colluſores.

PROBLEMA XXI.

De Ludo Baſſetæ (de la Baſſette.)

Celebratiſſimus eſt hic ludus ob innumeras turbas & tragœdias, quas hinc inde, in Italia præſertim & Gallia, olim excitavit, ob quas etiam ex iſtis regionibus non multò poſt proſcriptus & ſub gravi pœna prohibitus fuit. Eo tempore, quo exercitium illius in aula Regis Galliarum maximè florebat, D. Salvator (*Sauveur*) Mathematicus Gallus & Seren. tum Delphini Præceptor expectationes ludentium calculo ſubjecit, brevique Tabularum quarundam ſynopsi comprehenſas in Pariſienſi Erudit. Diario m. Febr. 1679 in lucem edidit; è quo Diario nos de natura & conſtitutione hujus ludi ea recenſebimus, quæ ad examinandas Tabulas & eruendum quem Auctor ſuppreſſit calculum ſcitu neceſſaria videbuntur.

Poſtquam is, qui œconomi fungitur munere, completum chartarum luſoriarum ſyſtema prehendit & miſcuit, ſinguli colluſorum ante ſe in menſa exponunt folium cujuslibet dignitatis aliunde depromtum unà cum arbitraria pecuniæ ſumma. Tum verò œconomus ſyſtemate ſuo, ut imum ejus folium pateat, inverſo, factoq; ab eodem initio bina ſubinde folia ſucceſſivè & ordine ad finem uſque ſyſtematis tollit; quod dum exequitur, cujusvis foliorum paris ſeu bigæ folium anterius ſive præcedens in œconomi, poſterius & ſequens in colluſoris commodum cedere cenſetur, ita nimirum, ut si anterius Regis verbi gratia imaginem habeat, œconomus auferat quicquid Regibus appoſitum eſt; si vero poſterius, colluſoribus viciſſim pendere tantundem teneatur, quantum illi Regibus appoſuêre. Et

re. Et hactenus quidem nullus præ altero quicquam prærogativæ habet: ſed ſequentes præterea leges notandæ:

1. Si ambo folia ſunt iſodynama & ejusdem cum expoſito dignitatis (quod *doublets* appellant, nos *gemella* vocabimus) quo caſu lucri & damni deberet fieri compenſatio, ſolus tamen lucratur œconomus, aufertque quod dignitatis illius foliis appoſitum eſt.

2. Cuilibet colluſorum etiam in medio ludi integrum eſt, de novo quodlibet folium pretio mercari; quo pacto fieri poteſt, ut in chartis reſiduis vel unum tantum, vel 2, 3, aut omnia 4 illius dignitatis folia ſuperſint; quod ſortem ipſius notabiliter variat. Sed obſervandum, quòd biga illa, cujus alterutrum conſpexerit folium, nullius cenſetur valoris ratione dignitatis quam mercatus eſt; & quidem, ſi poſterius folium bigæ ejusmodi hâc dignitate veſtitum comparet, non tantum ceu *præcox* (*trop jeune*) nihil acquirit colluſori, ſed & ludo finem imponit alterius folii optione redauſpicando: ſin autem dignitas illa prodeat in proximo folio bigæ ſequentis, *valoris* ſaltem eſt *imminuti* (*c'eſt une face*) œconomoque non niſi beſſem ſeu duos trientes depoſiti lucratur.

3. Anterius quoque folium primæ bigæ, cùm ſuſpicio eſſe poſſit illud viſum œconomo, valoris ſemper eſt imminuti, eumque non niſi ex beſſe victorem reddere poteſt.

4. Cùm unico folio ejus dignitatis, pro qua decertatur, ſuperſtite, foliis gemellis, in quibus prærogativa œconomi conſiſtit, non poſſit eſſe locus, ſtatutum eſt in favorem œconomi, ut poſtrema omnium charta, quæ alias colluſori prodeſſe deberet, pro nulla haberetur.

Quibus ita præmiſſis, pergo exponere methodum, qua expectationes œconomi quàm promtiſſimè determinantur: Poſito numero bigarum reſiduarum n, adeoq; numero foliorum $2n$, & colluſoris depoſito 1, ante omnia conſidero, quòd in unaquaq; biga vel neutrum, vel alterutrum, vel utrumq; folium poſſit eſſe expoſitæ dignitatis: ſi neutrum, liquet per hanc bigam nihil nec acquiri nec perdi œconomo: si alterutrum, conſtat, eadem facilitate utrumvis eſſe poſſe (cùm excipiendis reliquo aut reliquis illius dignitatis foliis eadem in

bigis

bigis ſequentibus loca pateant:) ac totidem proinde caſus eſſe, quibus vincat œconomus ſive acquirat + 1, & quibus perdat ſive obtineat — 1: qui propterea quia ſe mutuò deſtruunt, magno quoque compendio inſuper haberi poſſunt. Soli ergo reſtant expendendi caſus, quibus contingere poteſt, ut folia alicujus bigæ ſint gemella, id eſt, ut ambo ſint illius dignitatis.

I. Equidem ſi unicum ejus dignitatis folium ſuperſit, quo caſu folia gemella eſſe non poſſunt, liquido patet, ratione cujusvis bigæ ſeorſim, si ultimam excipias, nullam eſſe poſſe prærogativam œconomi (vid. *Tab.* 5.). Quoniam tamen poſtrema charta, quæ colluſori prodeſſe poſſet, per leg. 4. pro nulla habetur, ſit ut ratione omnium ſemper uno caſu amplius lucrari, quàm perdere poſſit œconomus; quod propter numerum foliorum $2n$ ceu totidem caſuum, quibus expoſitæ dignitatis folium ſubeſt, prærogativam œconomi in bigis univerſis facit $\frac{1}{2n}$ (*Tab.* 1.). Rurſus autem, si proxima biga ſit valoris imminuti pro œconomo, ex univerſis $2n$ caſibus unus eſt, qui ipſum triente depoſiti privat, per leg. 3. quod decrementum prærogativæ ejus efficit $\frac{1:3}{2n} \infty \frac{1}{6n}$ (*Tab.* 2.). Hoc igitur ablato tum ex $\frac{1}{2n}$, tum ex o, relinquitur $\frac{1}{3n}$ & $-\frac{1}{6n}$, pro reſiduo lucro œconomi ratione universi ludi, aut damno ejus ratione ſolius bigæ quæ imminuti eſt valoris. (*Tab.* 3 & 6.).

II. Si duo expoſitæ dignitatis folia reſtent, tot illa variationibus ceu caſibus obnoxia ſunt, quot biniones in foliis $2n$ continentur, nempe $\frac{2n.\overline{2n-1}}{2}$. Horum in ſingulis bigis unus, adeoque in univerſis n bigis, n caſus exiſtunt, qui foliis gemellis œconomo victoriam procurare poſſunt; unde in ſingulis lucrum illius efficitur $\frac{1}{2n.\overline{2n-1}:2} \infty \frac{1}{2nn-n}$ (*Tab.* 5.), in univerſis $\frac{n}{2n.\overline{2n-1}:2} \infty \frac{1}{2n-1}$ (*Tab.* 1.). Quod si alterutrum dignitatis illius folium primo ſtatim loco primæ bigæ prodeat, adeoque valoris ſit imminuti per leg. 3. alterum folium ad unumquemque ex reliquis $2n-1$

locis indifferenter ſe habendo, totidem caſus præbet, quibus lucrum œconomi triente minuitur, cujus proinde decrementum æſtimatur $\frac{2n-1 \cdot 1:3}{2n \cdot 2n-1:2} \infty \frac{1}{3n}$ (*Tab.* 2.). Hoc ergo detracto tum ex $\frac{1}{2n-1}$, tum ex $\frac{1}{2nn-n}$, remanet pro lucro reſiduo in ludo univerſo $\frac{n+1}{6nn-3n}$ (*Tab.* 3.) & pro damno in ſola prima biga $\frac{-2n+4}{6nn-3n}$ (*Tab.* 6.).

III. Si tria optatæ dignitatis folia ſuperſint, tot caſuum varietates inducunt, quot terniones in foliis $2n$ locum habent, videl. $\frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \infty \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2}{6}$ Ex horum numero foliorum gemellorum caſus elicio, conſiderando quòd, poſitis alicujus bigæ foliis ambobus laudatæ dignitatis, tertium iis ſuppar folium unumquemque ex reliquis $2n-2$ locis occupare poſſit, eoq; tot caſus pro illa biga ſuppeditet: unde, cùm ſumtis ſucceſſivè pro n numero bigarum, 1, 2, 3, 4 &c. numeri horum caſuum fiant 0, 2, 4, 6 &c. erunt foliorum gemellorum caſus in omnibus n bigis, $0+2+4+6+$ &c. uſque ad $2n-2 \infty$ (propter progreſſ. arithm.) $n \cdot n-1$. Quare lucrum œconomi in qualibet biga ſeparatim valet $\frac{2n-2}{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2:6} \infty \frac{3}{2nn-n}$ (*Tab.* 5.), in omnibus conjunctim $\frac{n \cdot n-1}{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2:6} \infty \frac{3}{4n-2}$ (*Tab.* 1.). Quòd ſi unum horum trium foliorum primo ſtatim loco exeat, eoque ſit valoris imminuti per leg. 3. reliqua duo toties locari poſſunt diverſimodè, quot biniones cætera $2n-1$ folia recipiunt, adeoque $\frac{2n-1 \cdot 2n-2}{2}$ caſus ſuppeditant, quibus lucrum œconomi triente mulctatur; cujus proin detrimentum fit $\frac{2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 1:6}{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2:6} \infty \frac{1}{2n}$ (*Tab.* 2.). Hoc igitur ablato partim ex $\frac{3}{4n-2}$, partim ex $\frac{3}{2nn-n}$, relinquitur illic $\frac{n+1}{4nn-2n}$ (*Tab.* 3.) pro lucro reſiduo in bigis univerſis: hic $\frac{-2n+7}{4nn-2n}$ (*Tab.* 6.) pro damno in prima ſeparatim.

IV. Si

IV. Si omnia 4 expoſitæ dignitatis folia chartis reſiduis adhuc immerſa lateant, tot caſus in univerſum ſuggerunt, quot qua-

Tabellæ:

Numerus foliorum expoſitæ dignitatis in chartis reſiduis:

	I.	II.	III.	IV.
1. *Lucrum œconomi in bigis reſiduis, cùm omnes ſunt valoris integri:*				
	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2n-1}$	$\frac{3}{4n-2}$	$\frac{4n-5}{4nn-8n+3}$
2. *Si prima eſt valoris imminuti, fit decrementum lucri:*				
	$\frac{1}{6n}$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{2n}$	$\frac{2}{3n}$
3. *Reſiduum lucri in bigis, quarum prima eſt valoris imminuti:*				
	$\frac{1}{3n}$	$\frac{n+1}{6nn-3n}$	$\frac{n+1}{4nn-2n}$	$\frac{4nn+n-6}{12n^3-24nn+9n}$
4. *Lucrum œconomi in bigis reſiduis, initio facto ab illa quæ nulla eſt:*				
	$\frac{2}{6n-3}$	$\frac{n}{6nn-9n+3}$	$\frac{nn-2n}{4n^3-12nn+11n-3}$	$\frac{4nn-7n-3}{12n^3-36nn+33n-9}$
5. *Lucrum œconomi in qualibet biga valoris integri, citra reſpectum ad bigas ſequentes:*				
	0	$\frac{1}{2nn-n}$	$\frac{3}{2nn-n}$	$\frac{6}{2nn-n}$
6. *Damnum œconomi in biga valoris imminuti, citra reſpectum ad lucrum, quod habet in ſequentibus:*				
	$-\frac{1}{6n}$	$\frac{-2n+4}{6nn-3n}$	$\frac{-2n+7}{4nn-2n}$	$\frac{-4n+20}{6nn-3n}$.

terniones in chartis $2n$ continentur, nempe $\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4}$ ∞ $\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{24}$. Et ſi duo illorum in eadem biga ſe gemello amplexu excipiunt, reliqua duo toties ordinem variare poſſunt in cæteris $2n-2$ chartis, quot hæ biniones admittunt; un-

de pro illa biga foliorum gemellorum caſus $\frac{2n-2.2n-3}{2}$ emergunt. Et quoniam ſumtis ſucceſſivè pro n numero bigarum 1, 2, 3, 4, 5, &c. numeri caſuum evadunt 0, 1, 6, 15, 28 &c. hinc gemellorum caſus in omnibus n bigis collectivè accepti erunt $0+1+6+15+28+$ &c. uſque ad $\frac{2n-2.2n-3}{2}$, de cujus ſeriei ſumma nunc diſpiciendum. Video autem, hanc variis modis elici poſſe:

1. *Mod.* Quia termini ſeriei ſecundas ſuas differentias æquales habent, erunt figuratorum analogi, quorum ſumma quo pacto inveniri poſſit, ſupra part. 2. in fin. cap. 3. oſtenſum.

2. *Mod.* Quoniam iidem etiam ex ipſa Trigonalium ſerie per ſaltum ſunt excerpti, reſolvatur Trigonalium ſeries A à geminâ cyphra incipiens in duas alias B & C, quarum illa noſtra ſit, & imparium: hæc parium locorum terminos complectatur. Reſolvatur itidem ſeries C in duas B & D; ſic erit A ∞ B + C ∞ B + B + D ∞ 2 B + D, adeoque A − D ∞ 2 B, & B ∞ $\frac{1}{2}$ A − $\frac{1}{2}$ D; & quia numerus terminorum ſeriei B (ut & C & D) per hypoth. eſt n, numerus termin. ſeriei A erit $2n$, ipſaque ſeries A (per cap. 3. part. 2.) ∞ $\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}$, ſeries verò D (ob arithm. progr.) ∞ $n.n-1$. Quare ſeries propoſita B ($\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$D) ∞ $\frac{n.2n-1.2n-2}{1.2.3} - \frac{n.n-1}{2}$ ∞ $\frac{4n^3-9nn+5n}{6}$.

A	B	C	D
0	0	0	0
0	1	3	2
1	6	10	4
3	15	21	6
6	28	36	8
10			
15			
21			
28			
36			

3. *Mod.* Terminus ſeriei B indefinite ſumtus per hypoth. eſt $\frac{2n-2.2n-3}{2}$ ∞ $\frac{4nn-4n}{2} - 3n + 3$ ∞ $\frac{n.n-1}{2}$ 4 − $\frac{n-1}{1}$ 3; tota ergo ſeries B æquatur quadruplo omnium $\frac{n.n-1}{2}$, minus triplo omnium $n-1$: ſed novimus ex cap. [illegible]. part. 2. $\frac{n.n-1}{2}$ eſſe numerum trigonalem, & $n-1$ lateralem; atque omn. $\frac{n.n-1}{2}$ ∞ $\frac{n+[illegible]}{1.2}$ [illegible]

$\frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}$, & omn. $n-1$ ∞ $\frac{n.n-1}{2}$; quare fit ſeries B ∞ $\frac{4.n+1.n.n-1}{1.2.3} - \frac{3.n.n-1}{2}$ ∞ $\frac{4n^3-9nn+5n}{6}$, ut antea.

Cùm itaque oſtenſum ſit, foliorum gemellorum caſus in ſingulis bigis eſſe $\frac{2n-2.2n-3}{2}$, in univerſis $\frac{4n^3-9nn+5n}{6}$; concludimus, lucrum œconomi ſpectatum in qualibet biga ſeorſim valere $\frac{2n-2.2n-3:2}{2n.2n-1.2n-2.2n-3:24}$ ∞ $\frac{6}{2nn-n}$ (*Tab.* 5.): in omnibus conjunctim $\frac{4n^3-9nn+5n:6}{2n.2n-1.2n-2.2n-3:24}$ ∞ (divid. per $n.n-1:6$ ſeu $\frac{nn-n}{6}$) $\frac{4n-5}{2n-1.2n-3}$ ∞ $\frac{4n-5}{4nn-8n+3}$ (*Tab.* 1.). Porrò si unum 4 foliorum expoſitæ dignitatis in prima ſtatim biga primo loco prodierit, valoris adeò exiſtens imminuti per leg. 3. reliqua tria toties ordinem variare poſſunt, quot terniones reſidua $2n-1$ folia admittunt; unde naſcuntur $\frac{2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3}$ caſus, quibus lucrum œconomi triente mulctandum eſt; cujus propterea decrementum cenſetur $\frac{2n-1.2n-2.2n-3.1:18}{2n.2n-1.2n-2.2n-3:24}$ ∞ $\frac{2}{3n}$ (*Tab.* 2.). Hoc igitur detracto ex inventis tum $\frac{4n-5}{4nn-8n+3}$, tum $\frac{6}{2nn-n}$, remanet ex una parte $\frac{4nn+n-6}{12n^3-24nn+9n}$ (*Tab.* 3.) pro lucro reſiduo in bigis univerſis, ex altera $\frac{-4n+20}{6nn-3n}$ (*Tab.* 6.) pro damno ejus in prima ſeparatim.

Atque ita ſex Tabularum, quas dedit Auctor Gallus, quinque jam complevimus; ſupereſt unica reſtituenda, nempe 4ta, quæ lucrum œconomi continet in bigis reſiduis, quando prima earum ob conſpectum anterius ejus folium nulla eſt. Hæc verò ex iis, quæ IV. præcedd. articulis jam præmonſtrata ſunt, facillimè concinnabitur, modò ad hæc duo attendatur:

1. Quòd bigæ, cujus anterius folium conſpectum fuerit, poſterius aut erit expoſitæ dignitatis, aut non erit: ſi erit, nihil œconomo vel nocet vel prodeſt, ſed velut præcox ludo prorſus finem

 impo-

imponit per leg. 2, ſi non erit, idem præciſè caſuum numerus ſupereſt œconomo ad obtinendum depoſitum, ſeu ex aſſe ſeu ex beſſe, qui præſtò eſſet, ſi biga illa quæ nulla eſt planè abeſſet; hac ſola cum differentia, quòd numerus bigarum reſiduarum, qui alias diceretur n, ob alteram quæ nulla eſt una computatam nunc eſt tantùm $n-1$.

2. Quòd viſo primo folio primæ bigæ, ſuperſunt tantùm $2n-1$ folia non viſa, adeò ut numerus omnium omninò caſuum ex multitudine combinationum non omnium $2n$, ſed tantùm $2n-1$ foliorum æſtimari debeat. His enim perpenſis facilè perſpicitur ratio ſequentis operationis:

Exſcribantur ex præcedd. IV. §. fractiones Tabulæ primæ & 2dæ, ſed quales erant ante reductionem, ita:

1. *Lucrum œconomi in bigis reſiduis, cùm omnes ſunt valoris integri:*

$$\frac{1}{2n}.\ \frac{n}{2n.2n-1:2}.\ \frac{n.n-1}{2n.2n-1.2n.-2:6}.\ \frac{4n^3-9nn+5n:6}{2n.2n-1.2n-2.2n-3:24}.$$

2. *Decrementum lucri, cùm prima eſt valoris imminuti:*

$$\frac{1:3}{2n}.\ \frac{2n-1:3}{2n.2n-1:2}.\ \frac{2n-1.2n-2:6}{2n.2n-1.2n-2:6}.\ \frac{2n-1.2n-2.2n-3:18}{2n.2n-1.2n-2:2n-3:24}.$$

Jam ſingulæ hæ fractiones mutentur in alias, ſurrogando tantùm ubique loco n in numeratoribus $n-1$ & loco $2n$ in denominatoribus $2n-1$; ut fiat

1. *Lucrum œconomi &c.*

$$\frac{1}{2n-1}.\ \frac{n-1}{2n-1.2n-2:2}.\ \frac{n-1.n-2}{2n-1.2n-2.2n-3:6}.\ \frac{4n^3-21nn+35n-18:6}{2n-1.2n-2.2n-3.2n-4:24}.$$

2. *Decrementum lucri &c.*

$$\frac{1:3}{2n-1}.\ \frac{2n-3:3}{2n-1.2n-2:2}.\ \frac{2n-3.2n-4:6}{2n-1.2n-2.2n-3:6}.\ \frac{2n-3.2n-4.2n-5:18}{2n-1.2n-2.2n-3.2n-4:24}.$$

Decrementis enim his reſpectivè ex lucro detractis, relinquuntur pro Tabula 4tâ fractiones:

$$\frac{2:3}{2n-1}.\ \frac{n:3}{2n-1.2n-2:2}.\ \frac{n.n-2:3}{2n-1.2n-2.2n-3:6}.\ \frac{4n^3-15nn+11n+6:18}{2n-1.2n-2.2n-3.2n-4:24}.$$

ſeu facta reductione:

$\frac{2}{6n-3}$. $\frac{n}{6nn-9n+3}$. $\frac{nn-2n}{4n^3-12nn+11n-3}$. $\frac{4nn-7n-3}{12n^3-36nn+33n-9}$.

Et ſic quartam quoque Tabulam adornavimus. Quòd si quis D.ni Salvatoris Tabellas cum hiſce noſtris contulerit, deprehendet illas in quibusdam locis, præſertim ultimis, nonnihil emendationis indigere. Quæ vero ibidem obſervata adjiciuntur de proportione augmenti vel decrementi prærogativæ œconomi, prout numerus foliorum augetur minuiturve, de his & aliis dicere nil attinet, cùm ex inſpectione Tabularum cuivis ultrò manifeſta ſint.

PROBLEMA XXII.

Eſt Aleæ quoddam genus, in qua numerus omnium caſuum eſt a, *numerus quorundam ex iis* b, *cæterorum* a − b ∞ c. *Titius ſingulos aleæ jactus ſingulis nummis redimit Cajo perſolvendis; tum quoties unum* b *caſuum jecerit, à Cajo viciſſim accipiet* m *nummos, at quoties jecerit unum ex* c *caſibus, nihil habebit: tamen ſi unum* c *caſuum jecerit continuis* n *vicibus, Cajus ipſi omnes ſuos* n *nummos reddere obſtrictus eſt. Quæruntur ſortes Titii & Caji?*

Problema hoc in ſpeciem ſatis impeditum nihil admodum difficile habet, si dextrè tractetur. Incipio à fine, ponendo Titium jam decoxiſſe $n-1$ nummos, hoc eſt, jam $n-1$ vicibus jeciſſe unum c caſuum, & nunc in procinctu eſſe inſtituendi n jactum. Itaque vel unus b caſuum ipſi eveniet, vel rurſus unus c caſuum: si prius, à Cajo accipiet m nummos, qualium ipſe jam Cajo n perſolvit

ſolvit; ſic ut ipsi remaneat lucrum $m-n$ nummorum: si poſterius, recuperabit ex pacto omnes ſuos n nummos, nihilque adeò vel lucri vel damni faciet; unde lucrum ejus cenſebitur $\frac{b.\,\overline{m-n}+c.\,0}{a} \infty \frac{\overline{m-n}.\,b}{a}$.

Pono deinde, ipſum luſiſſe $n-2$ vicibus, totiesque jeciſſe unum c caſuum, & nunc aggredi $n-1$ jactum: conſequetur à Cajo (si unum b caſuum jecerit) m nummos, qualium illi jam $n-1$ erogavit; adeoque pro lucro ſuo retinebit $m-n+1$: ſin denuò jecerit unum c caſuum, perveniet in eum ſtatum, qui in præced. hypoth. obtinebat, habebitque $\frac{\overline{m-n}.\,b}{a}$; quare jam ſors ejus ſit,
$$\frac{b.\,\overline{m-n.+1}+c.\,\overline{m-n}.\,b:a}{a} \infty \frac{\overline{m-n+1}\,ab+\overline{m-n}\,cb}{aa}.$$

Fingo porrò, jeciſſe $n-3$ vicibus unum c caſuum, & nunc ſe accingere ad jactum $n-2$; fiet, ut vel lucrum acquirat $m-n+2$ nummorum, qui ſibi, detractis quos Cajo ſucceſſivè numeravit $n-2$ nummis, remanent; ſi nempe unum b caſuum jecerit: vel ut pertingat in ſtatum præcedentis hypoth. si pergat jacere unum c caſuum; unde jam ſors ejus reſultat $\frac{b.\,\overline{m-n+2}+c.\,\text{præc.}}{a} \infty$
$$\frac{\overline{m-n+2}\,aab+\overline{m-n+1}\,acb+\overline{m-n}\,ccb.}{a^3}$$

Suppono rurſus, jeciſſe $n-4$ vicibus unum c caſuum, & jamjam defuncturum $n-3$ jactu: perinde liquet, ac antea, eum habere b caſus ad obtinendum lucrum $m-n+3$ nummorum, qui ſibi, ablatis quos Cajo jam pendit $n-3$ nummis, relinquuntur; & c caſus ad perveniendum in ſtatum præced. id quod ſortem ipsi nunc parit
$$\frac{b.\,\overline{m-n+3}+c.\,\text{præc.}}{a} \infty$$
$$\frac{\overline{m-n+3}\,a^3b+\overline{m-n+2}\,aacb+\overline{m-n+1}\,accb+\overline{m-n}\,c^3b}{a^4}.$$

Atque ſic porrò retrogredi conveniret, ponendo Titium $n-5$, $n-6$ &c. jactus inſtituiſſe, ſi opus eſſet pergere ulterius; id verò non eſt neceſſe, cùm ex allatis ratio progreſſionis jam ſatis pateſcit: con-

colligimus enim facilè, quòd ſors quam ab initio ludi habet, priusquam jacere inchoat, futura ſit:

$$\frac{\overline{m-1}\,a^{n-1}b + \overline{m-2}\,a^{n-2}cb + \overline{m-3}\,a^{n-3}ccb + \overline{m-4}\,a^{n-4}c^3b + \overline{m-5}\,a^{n-5}c^4b \ldots\ldots + \overline{m-n}\,c^{n-1}b}{a^n} \infty$$

(factâ ſeparatione terminorum diverſis ſignis affectorum)

$$+ mb \text{ in } \overline{\frac{1}{a} + \frac{c}{aa} + \frac{cc}{a^3} + \frac{c^3}{a^4} + \frac{c^4}{a^5} \ldots\ldots + \frac{c^{n-1}}{a^n}}$$

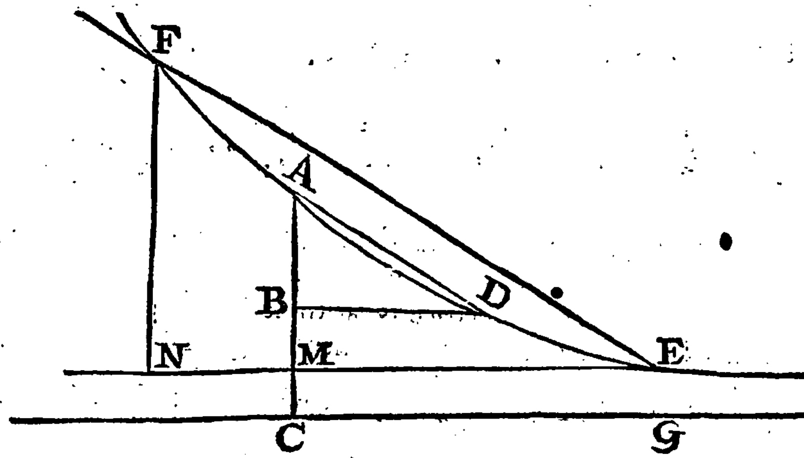
$$- b \text{ in } \overline{\frac{1}{a} + \frac{2c}{aa} + \frac{3cc}{a^3} + \frac{4c^3}{a^4} + \frac{5c^4}{a^5} \ldots\ldots + \frac{nc^{n-1}}{a^n}}.$$

quam quantitatem liquet duabus conſtare partibus, priore affirmata, poſteriore negata, quarumque illa in ſerie geometricè progreſſionalium, hæc in ſerie ex geometricè & arithmeticè progreſſionalibus mixta conſiſtit: Utriuſque ſumma per notas regulas habetur: illius $\frac{m.\overline{a^n-c^n}}{a^n}$, hujus $\frac{a^n-c^n}{a^{n-1}b} - \frac{nc^n}{a^n}$; quarum proinde differentia quæſitum exprimit, lucrum vid. reſpectu Titii, & damnum reſpectu Caji, si pars affirmata præpolleat negatæ; damnum verò ex parte Titii & lucrum ex parte Caji, si hæc prævaleat illi.

Unde jam porrò ſequitur, quòd si ponatur æqualitas inter utramque, determinari poſſit, quis valor ſtatui debeat literæ m vel n, ut ſortes Caji & Titii æquentur: Facta enim æquatione $\frac{m.\overline{a^n-c^n}}{a^n} \infty \frac{a^n-c^n}{a^{n-1}b} - \frac{nc^n}{a^n}$, inſtituatur diviſio per $\frac{a^n-c^n}{a^n}$, & prodibit $m \infty \frac{a}{b} - \frac{nc^n}{a^n-c^n}$. Si verò data m, quæratur n: ordinetur æquatio ita,

 $\frac{nc^n}{a^n-c^n}$

$\frac{nc^n}{a^n - c^n} \infty \frac{a}{b} - m$, ac fiat $a^n - c^n . c^n :: n . \frac{a}{b} - m :: bn . a - bm$, & componendo $a^n . c^n :: a - bm + bn . a - bm$; eruntque aggregata ex logarithmis extremorum & mediorum æqualia, nimirum $nla + l\overline{a - bm} \infty nlc + l\overline{a - bm + bn}$, h. e. $nla - nlc \infty l\overline{a - bm + bn} - l\overline{a - bm}$, & $n \infty \frac{l\overline{a - bm + bn} - l\overline{a - bm}}{la - lc}$, ſeu (poſito $b \infty 1$) $n \infty \frac{l\overline{a - m + n} - l\overline{a - m}}{la - lc}$; quod per Logarithmicam ita facilè conſtruo:



In quacunque Logarithmica F A D E ſecetur applicata quælibet A C in B, ut A B ſit ad B C in ratione b ad c, ſumtaque A B loco unitatis, in eadem A C abſcindatur A M ∞ m, per B & M agantur rectæ B D, M E, parallelæ axi C G, & occurrentes curvæ in D & E; junctæque A D ducatur parallela E F ſecans curvam in F, ac denique ex F demittatur applicata F N occurrens productæ E M in N; erit F N valor optati numeri n.

Proponatur in exemplum hæc Alea: Titius duabus teſſeris duos ſenarios jacere contendit, nummoque in jactum perſoluto poſtulat à Cajo, ut ſibi viciſſim ſex nummi numerentur, ſi id præſtiterit; ſi ſecus faxit, nihil; attamen ſi vicies continuò ſcopo aberrârit, ut ſibi omnes ſui 20 nummi reſtituantur. Hic propter 36 caſus duarum teſſerarum, interque hos unicum qui duos ſenarios advehat, litera-

rum valor eſt, $a \infty 36$, $b \infty 1$, adeoque $c \infty 35$; nec non $m \infty 6$, & $n \infty 20$. Nunc autem per logarithmos compendioſè invenitur viceſima poteſtas ipſius $\frac{c}{a}$, ſeu $\frac{c^n}{a^n} \infty \frac{5693}{10000}$; proinde $\frac{m.a^n - c^n}{a^n}$ $\infty\, m.1 - \frac{c^n}{a^n} \infty 6.\frac{4307}{10000} \infty \frac{25842}{10000}$; & pari modo altera pars $\frac{a^n - c^n}{a^{n-1}b}$ $- \frac{nc^n}{a^n} \infty \frac{a}{b} - \frac{a}{b} - n\frac{c^n}{a^n} \infty 36 - \frac{56.5693}{10000} \infty 36 - \frac{318808}{10000} \infty \frac{41192}{10000}$; quæ cùm priorem excedat tota quantitate $\frac{15350}{10000} \infty \frac{307}{200}$, paulò adhuc majore quàm $\frac{3}{2}$, innuit, Titium non ſine detrimento hanc aleam ſubire poſſe, & ſatius facturum ſi exemptionem ſtatim à ludendi neceſſitate vel ſeſquinummo redimat. Quòd ſi tamen vel m augeretur, vel minueretur n, poſſet alea ſic attemperari, ut neuter præ altero quicquam prærogativæ haberet; nam si retento $n \infty 20$ fiat $m \infty 9\frac{2429}{4307}$, aut manente $m \infty 6$ ſtatuatur $n \infty 11$ aut 12, utriusque ſors propemodùm ad æqualitatem redacta erit.

Obſervo generaliter in hujusmodi alea ſequentia:

1. Quòd ſi datis a, b, c & m, litera n ſucceſſivè induit valores numerorum 1, 2, 3, 4 &c. lucrum Titii (utpote cujus ſors in caſu $n \infty 1$ ſemper eſt potior ſorte Caji) aliquousque ſubinde creſcit.

2. Quòd ejus conditio optima ſit, cùm ponitur $n \infty m - 1$ vel m; & quidem perpetuò eadem in utraque hypotheſi.

3, Quòd creſcente n ulterius, decreſcat illa porrò continuò in infinitum, uſque eò ut & lucrum ſæpè in damnum abeat, prævalente deinceps ſorte Caji.

4. Quòd lucrum vel damnum obtinens in hypotheſi numeri n valdè magni & velut infiniti, ad illud quod obtinet reſpectu unici jactus (rejecta illa poſtrema conditione de reſtituendis Titio ſuis nummis, ſi continuis n jactibus nullus b caſuum evenerit), rationem ſemper habet, ut a ad b, majoris ad minus; nimirum cùm iſtud per Cor. 6. Prop. III. part. 1. fiat $\frac{b.^{m.1} + c.^{-1}}{a} \infty \frac{bm - b - c}{a} \infty \frac{bm - a}{a}$,

 erit

erit illud $\frac{bm-a}{b}$; & quidem utrumque ſimul vel lucrum ratione Titii & damnum ratione Caji, vel viciſſim, prout bm majus minusve ponitur ipſo a.

PROBLEMA XXIII.

De Alea Teſſerarum cæcarum (blinde Würffel.)

Sic vocant ſex illas Teſſeras, circulatoribus plerumque noſtris ſolennes, quæ cùm ſint cubiformes ut ordinariæ, exoculatæ tamen velut apparent, & ſingulæ in una duntaxat hedra punctis notatæ, una ſcil. unico, alia duobus, tertia tribus, uſque ad ſextam, quæ unam hedrarum ſex punctis ſignatam habet; ſic ut univerſis non niſi $1+2+3+4+5+6 \infty 21$ puncta inveniantur. Ejusmodi Teſſeras impoſtores emunctuři plebeculam in foro exponunt una cum præmiis ſecundùm omnes punctorum numeros ab 1 uſque ad 21, quanta circiter ſubjunctæ Tabulæ inſerta videntur. Tum qui fortunam ſuam periclitari voluerit, nummo circulatori perſoluto teſſeras iſtas in alveum projicit, & si quem punctorum jecerit numerum, huic aſſignatum præmium aufert; ſi verò nullum ſibi punctum ceciderit, nummi ſui jacturam facit.

His poſitis, qui ſortem horum Aleatorum inveſtigare cupit, notare debet ſequentia:

1. Quòd numerus omnium caſuum in ſex ejusmodi teſſeris, non ſecus atque in teſſeris ordinariis, per ea quæ part. 1. poſt Propoſ. IX. oſtenſa ſunt, ſit 46656, quanta nim. eſt ſexta poteſtas ſenarii.

2. Quòd numerus eorum caſuum, qui nullum omnino punctum advehunt, determinetur per ſextam poteſtatem quinarii, quæ eſt 15625; quoniam in quavis teſſera quinque ſunt hedræ punctis orbatæ, quarum quælibet cum qualibet quinque hedrarum alterius teſſeræ combinari, & harum combinationum quælibet rurſus cuili-

bet 5

bet 5 hedrarum tertiæ adjungi poteſt; ita ut præcedentium caſuum numerus acceſſione novæ teſſeræ ſemper quintuplicetur.

3. Quòd quivis punctorum numerus vel ab una, vel à duabus pluribusve teſſeris efficiatur: ſi ab una efficitur, in cæteris quinque teſſeris nullum comparebit punctum; quare cùm ſingularum etiam quinque ſint hedræ punctis deſtitutæ, numerus caſuum, quibus id accidit, deſignabitur per 3125 quintam poteſtatem quinarii: si numerus punctorum à duabus producitur teſſeris, in cæteris quatuor nulla eminebunt puncta; unde nunc propter eandem rationem numerus caſuum, quibus id fit, erit 625 quarta poteſtas quinarii. Et pariter, ſi à tribus, 4 aut 5 teſſeris conſtituitur, in cæteris tribus, duabus aut una teſſeris puncta deficient; unde tum numeri caſuum erunt 125, 25, aut 5, id eſt, 3tia, 2da aut prima poteſtas quinarii.

4. Quòd idem punctorum numerus non tantùm à pluribus & paucioribus plerunque teſſeris, ſed & ab eodem teſſerarum numero pluribus quandoque modis produci poteſt: ſic puncta XII tribus modis produci poſſunt à tribus, & duobus modis à 4 teſſeris; nam trium teſſerarum puncta poterunt eſſe vel 1, 5, 6; vel 2, 4, 6; vel 3, 4, 5; & quatuor teſſerarum puncta vel 1, 2, 3, 6; vel 1, 2, 4, 5.

Ut verò nulli modorum prætereantur, quibus componi poſſunt punctorum numeri, eadem ferè, quam ſupra in Probl. XVII. adhibuimus, methodo utemur. Scriptis ordine punctorum numeris ab I uſque ad XXI, ſumo omnes combinationes ſex primarum notarum numeralium tum ſingularum 1, 2, 3, 4, 5, 6; tum binarum 1+2, 1+3, 1+4, &c. item 2+3, 2+4, &c. 3+4, &c. &c. tum ternarum 1+2+3, 1+2+4, &c. quaternarum, quinarum, & tandem ſenarum 1+2+3+4+5+6, ponendo confeſtim ſingulas ad latus ejus numeri, quem ſumma combinatarum notarum efficit: ſic quia biniones 1+2, 1+3, 1+4 &c. efficiunt 3, 4, 5 &c. ſcribo illos ad latus punctorum III, IV, V &c. atque ita in cæteris omnibus. Hoc peracto caſuum numeros, qui ſingulis punctorum numeris reſpondent, facillimè determino, numerando ſolummodo pro unoquoque modorum, quo illi producuntur ab una teſſera 3125; pro unoquoq; quo producuntur à teſſeris duabus, 625;

Tabula Teſſerarum cæcarum:

Puncta:		*Caſus:*	*Præmia:*
0	—	15625	0
I	∞ 1	3125	1
II	∞ 2	3125	1
III	∞ 3 ∞ 1 + 2	3750	1
IV	∞ 4 ∞ 1 + 3	3750	1
V	∞ 5 ∞ 1 + 4 ∞ 2 + 3	4375	1
VI	∞ 6 ∞ 1 + 5 ∞ 2 + 4 ∞ 1 + 2 + 3	4500	1
VII	∞ 1 + 6 ∞ 2 + 5 ∞ 3 + 4 ∞ 1 + 2 + 4	2000	1
VIII	∞ 2 + 6 ∞ 3 + 5 ∞ 1 + 2 + 5 ∞ 1 + 3 + 4	1500	1
IX	∞ 3 + 6 ∞ 4 + 5 ∞ 1 + 2 + 6 ∞ 1 + 3 + 5 ∞ 2 + 3 + 4	1625	2
X	∞ 4 + 6 ∞ 1 + 3 + 6 ∞ 1 + 4 + 5 ∞ 2 + 3 + 5 ∞ 1 + 2 + 3 + 4	1025	2
XI	∞ 5 + 6 ∞ 1 + 4 + 6 ∞ 2 + 3 + 6 ∞ 2 + 4 + 5 ∞ 1 + 2 + 3 + 5	1025	2
XII	∞ 1 + 5 + 6 ∞ 2 + 4 + 6 ∞ 3 + 4 + 5 ∞ 1 + 2 + 3 + 6 ∞ 1 + 2 + 4 + 5	425	2
XIII	∞ 2 + 5 + 6 ∞ 3 + 4 + 6 ∞ 1 + 2 + 4 + 6 ∞ 1 + 3 + 4 + 5	300	2
XIV	∞ 3 + 5 + 6 ∞ 1 + 2 + 5 + 6 ∞ 1 + 3 + 4 + 6 ∞ 2 + 3 + 4 + 5	200	3
XV	∞ 4 + 5 + 6 ∞ 1 + 3 + 5 + 6 ∞ 2 + 3 + 4 + 6 ∞ 1 + 2 + 3 + 4 + 5	180	3
XVI	∞ 1 + 4 + 5 + 6 ∞ 2 + 3 + 5 + 6 ∞ 1 + 2 + 3 + 4 + 6	55	3
XVII	∞ 2 + 4 + 5 + 6 ∞ 1 + 2 + 3 + 5 + 6	30	4
XVIII	∞ 3 + 4 + 5 + 6 ∞ 1 + 2 + 4 + 5 + 6	30	5
XIX	∞ 1 + 3 + 4 + 5 + 6	5	12
XX	∞ 2 + 3 + 4 + 5 + 6	5	45
XXI	∞ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	1	90
	Summa Caſuum —	46656	

& quo

♃

Expon:	*Poteſt:*	
1	5	6
2	25	36
3	125	216
4	625	1296
5	3125	7776
6	15625	46656

& quo à tribus, 4 aut 5 teſſeris, 125, 25 aut 5; ut ſupra in obſervat. 3. dictum: ſic quia puncta XII tribus modis à tribus, & 2 modis à 4 teſſeris componi oſtenſum eſt, numerus caſuum, quibus XII puncta eveniunt, erit ter 125 + bis 25 ∞ 425, quem in adjuncta Tabula adſcribo. Quòd ſi ubique ſimiliter operatus fuero, & numeri omnium caſuum in ſummam collecti conſtituant 46656 ſextam poteſtatem ſenarii, certus ero me nullum modorum prætleriiſſe.

Abſoluta autem hàcce Tabula ſumma rei peracta eſt, nec ſupereſt aliud, quam ut ſinguli caſuum numeri in ſua reſpectivè præmia ducantur, & productorum aggregatum per 46656 dividatur ad obtinendam optatam Aleatoris ſortem, quæ hac ratione fiet

$$\frac{15625.0 + 26125.1 + 4400.2 + 435.3 + 30\,4 + 30.5 + 5.12 + 5.45 + 1.90}{46656}$$

$\infty\ \frac{36875}{46656}$; ita ut tantùm ipſi deponendum fuiſſet $\frac{36875}{46656}$ unius nummi, si æqua ſorte ludere voluiſſet; quare cùm circulatori penderit integrum; reliquum nummi $\frac{9781}{46656}$ in ejus damnum & contra deceptoris lucrum computatur.

PROBLEMA XXIV.

Poſitis & repetitis, quæ in præcedenti, ſi Dominus Aleæ ita paciſcatur cum colluſore, ut ille obſtrictus velit eſſe ad reſtituendum huic omnes ſuos nummos, ſi quinque continuis jactibus nullum ipſi punctum ceciderit. Quæritur nunc utriusque ſors?

Vidi quondam Circulatorem, qui adſtantes ut ineſcaret, hanc inſuper conditionem iis offerebat, eoque tum anſam mihi dedit cogitandi primùm de Problemate ſupra propoſito XXII. Hujus itaq; ſolutio cùm ibid. generaliter exhibita ſit, nihil nobis hîc penſi reſtat, quam ut illam literis ad numeros revocatis huc applicemus: Conſtat ex præced. numerum omnium caſuum in ſex cæcis teſſeris eſſe 46656, numerum eorum quibus nullum emicat punctum 15625, cæterorum 31031; unde valores literarum in re præſenti ſunt, *a* ∞ 46656, *b* ∞ 31031, *c* ∞ 15625; nec non per hypoth. *n* ∞ 5; & valor ipſius *m*, qui varius eſt, per Cor. 3. Prop. III. part. 1. ad medium reductus fit ∞ $\frac{36875}{31031}$, quandoquidem 31031 caſus ad $\frac{36875}{31031}$, & 15625 caſus ad 0, eandem colluſori expectationem $\frac{36875}{46656}$ pariunt, quam habere deprehenſus eſt in præcedenti. En tibi jam calculum:

$$a \infty 46656 \ldots\ldots\ldots \quad la \infty 4.6689075$$

$$c \infty 15625 \ldots\ldots\ldots \quad lc \infty 4.1938200$$

$$\frac{a}{b} \infty \frac{46656}{31031} \quad l\frac{c}{a} \infty lc - la \infty -0.4750875$$

$$m \infty \frac{36875}{31031} \quad n \infty \ldots 5$$

$$\frac{a}{b} - m \infty \frac{9781}{31031} \infty \frac{31520}{100000} \quad nl\frac{c}{a} \infty l\frac{c^n}{a^n} \infty -2.3754375$$

$$\frac{a}{b} - m + n \infty \frac{9781}{31031} + 5 \infty \frac{164936}{31031} \ldots l\frac{a}{b} - m + n \infty 0.7255196$$

$$\overline{\frac{a}{b} - m + n}, \frac{c^n}{a^n} \infty \frac{2239}{100000} \quad . \; l\overline{\frac{a}{b} - m + n} + l\frac{c^n}{a^n} \infty -1.6499179$$

Quare, $\frac{m.\overline{a^n - c^n}}{a^n} - \frac{a^n + c^n}{a^{n-1}b} + \frac{nc^n}{a^n} \left(\infty m - \frac{mc^n}{a^n} - \frac{a}{b} + \frac{ac^n}{ba^n} + \frac{nc^n}{a^n} \infty \right.$

$$\left. m - \frac{a}{b} + \overline{\frac{a}{b} - m + n}, \frac{c^n}{a^n} \right) \infty \frac{-31520}{100000} + \frac{2239}{100000} \infty - \frac{29281}{100000}.$$

Oſtenſum autem eſt in Probl. XXII, hac quantitate exprimi damnum colluſoris, quod quidem in præced. Probl. tantùm erat $\frac{9781}{46656} \infty \frac{20964}{100000}$, ſesquialtero ferè minus; unde conditionem hanc de reddendis colluſori ſuis nummis, quam veterator in ejus favorem adjeciſſe videtur, in majus potius illius damnum vergere conſtat. De cætero & hoc obſervo, quòd etiamsi circulator poſt duos ſtatim continuos inanes jactus ad reſtituendum ſe obſtringere vellet, illud cum aliquali adhuc lucro pro ſe facere poſſet.

ARTIS CONJECTANDI PARS QUARTA,

tradens

Uſum & applicationem præcedentis Doctrinæ in Civilibus, Moralibus & Oeconomicis.

Caput I.

Præliminaria quædam de Certitudine, Probabilitate, Neceſſitate & Contingentia Rerum.

Certitudo rei cujusvis ſpectatur vel *objectivè* & in ſe; nec aliud ſignificat, quàm ipſam veritatem exiſtentiæ aut futuritionis illius rei: vel *ſubjective* & in ordine ad nos; & conſiſtit in menſura cognitionis noſtræ circa hanc veritatem.

Omnia, quæ ſub Sole ſunt vel fiunt, præterita, præſentia ſive futura, in ſe & objectivè ſummam ſemper certitudinem habent. De præſentibus & præteritis conſtat; quoniam eo ipſo, quo ſunt vel fuerunt, non poſſunt non eſſe vel fuiſſe: Nec de futuris ambigendum, quæ pariter etsi non fati alicujus inevitabili ne-

ceſſi-

ceſſitate, tamen ratione tum præſcientiæ tum prædeterminationis divinæ non poſſunt non fore; niſi enim certò eveniant quæcunque futura ſunt, non apparet, quo pacto ſummo Creatori omniſcientiæ & omnipotentiæ laus illibata conſtare queat. Quomodo autem hæc futuritionis certitudo cum contingentia aut libertate cauſarum ſecundarum conſiſtere poſſit, de hoc diſputent alii; nos à ſcopo noſtro aliena nolumus tangere.

Certitudo rerum, ſpectata in ordine ad nos, non omnium eadem eſt, ſed multipliciter variat ſecundum magis & minus. Illa de quibus revelatione, ratione, ſenſu, experientia, αὐτοψία aut aliter ita conſtat, ut de eorum exiſtentia vel futuritione nullo modo dubitare poſſimus, ſumma & abſoluta certitudine gaudent. Cætera omnia imperfectiorem ejus menſuram in mentibus noſtris obtinent, majorem minoremve, prout plures vel pauciores ſunt probabilitates, quæ ſuadent rem aliquam eſſe, fore aut fuiſſe.

Probabilitas enim eſt gradus certitudinis, & ab hac differt ut pars à toto. Nimirum ſi certitudo integra & abſoluta, quam litera *a* vel unitate 1 deſignamus, quinque verb. gr. probabilitatibus ceu partibus conſtare ſupponatur, quarum tres militent pro exiſtentia aut futuritione alicujus eventus, reliquæ contra: eventus ille dicetur habere $\frac{3}{5}a$, ſeu $\frac{3}{5}$ certitudinis.

Illud igitur altero *probabilius* vocatur, quod majorem certitudinis partem habet; etſi in poſitivo *probabile* ex uſu loquendi tantùm dicatur id, cujus probabilitas ſemiſſem certitudinis notabiliter ſuperat. Dico, *notabiliter*; nam quod ſemiſſem certitudinis circiter æquat, *dubium* vel anceps vocatur. Ita probabilius eſt, quod $\frac{1}{5}$ certitudinis habet, quàm quod $\frac{1}{15}$; etſi neutrum in poſitivo ſit probabile.

Poſſibile eſt, quod vel tantillam certitudinis partem obtinet: Impoſſibile, quod nullam aut infinitè exiguam. Ita poſſibile eſt, quod habet $\frac{1}{20}$ aut $\frac{1}{30}$ certitudinis.

Moraliter certum eſt, cujus probabilitas ferè æquatur integræ certitudini, ſic ut defectus ſentiri non poſſit: *Moraliter impoſſibile* contra, quod tantum duntaxat probabilitatis habet, quantum moraliter certo ad omnimodam certitudinem deeſt. Ita ſi pro moraliter

 certo

certo habeatur, quod $\frac{999}{1000}$ certitudinis poſſidet, erit moraliter impoſſibile, quod ejus tantùm habet $\frac{1}{1000}$.

Neceſſarium eſt, quod non poteſt non eſſe, fore aut fuiſſe; idque *neceſſitate* vel *phyſica*: quo pacto neceſſum eſt ignem urere, triangulum habere tres angulos æquales duobus rectis, plenilunium, quod Luna exiſtente in nodis ingruit, eſſe eclipticum: vel *hypothetica*, qua unumquodq; dum eſt aut fuit, vel eſſe aut fuiſſe ſupponitur, non poteſt non eſſe aut fuiſſe; quo ſenſu neceſſum eſt Petrum ſcribere, quem ſcio ponoq; ſcribere: vel denique *neceſſitate pacti* ſeu *inſtituti*, quo pacto aleator, qui teſſera ſenarium jecerit, neceſſario vincere dicitur, ſi prius inter luſores ita conventum fuerit, ut jactu ſenarii victoria conſtet.

Contingens (tam *liberum*, quod ab arbitrio creaturæ rationalis: quàm *fortuitum* & *caſuale*, quod à caſu vel fortuna dependet) eſt id, quod poſſet non eſſe, fore aut fuiſſe; intellige potentia remota, non proxima: nec enim contingentia ſemper omnem neceſſitatem, etiam quoad cauſas ſecundas, excludit; quod exemplis declaro. Certiſſimum eſt, quòd data teſſeræ poſitione, velocitate & diſtantia ab alveo, eo momento quo manum projicientis deſerit, teſſera non poteſt aliter cadere, quàm uti revera cadit: item, quod data aëris conſtitutione præſente, datisque ventorum, vaporum, nubium mole, ſitu, motu, directione, velocitate & mechaniſmi legibus, quibus hæc omnia in ſe invicem agunt, tempeſtas craſtinæ diei non poſſit alia fore, quàm qualis reapſe futura eſt; adeo ut hi effectus ex ſuis cauſis proximis non minus neceſſario, atque Eclipſium phænomena ex luminarium motu ſequantur: & tamen uſus obtinuit, ut ſolæ Eclipſes neceſſariis, caſus vero teſſeræ & tempeſtatis futuritio contingentibus annumerentur; cujus rei non alia ratio eſt, quàm quòd ea, quæ ad determinandos poſteriores effectus ut data ſupponuntur, atque etiam in natura talia ſunt, non ſatis tamen nobis ſint cognita; nec ſi eſſent, ſatis excultum Geometriæ & Phyſicæ ſtudium, ut ex datis effectus hi calculo ſubduci poſſint; quemadmodum ex perſpectis Aſtronomiæ principiis ſupputari & prædici poſſunt Eclipſes: quæ propterea & ipſæ, ante Aſtronomiam eo perfectionis promotam, non minus ac cætera duo inter futura contingentia referri opus habebant. Sequitur hinc, uni & uno tempore videri poſſe contingens, quod alii

(imo

(imò & eidem) alio tempore poſt cognitas ejus cauſas ſit neceſſarium; adeo ut contingentia præcipuè etiam reſpiciat cognitionem noſtram, in quantum nos nullam videmus repugnantiam in objecto ad non eſſe vel fore, etiamsi hic & nunc vi cauſæ proximæ ſed nobis ignotæ neceſſario ſit vel fiat.

Fortuna proſpera, un Bonheur, ein Glück/ & *Fortuna adverſa, un Malheur*, ein Unglück dicitur, cùm nobis bonum vel malum obtingit non quodvis, ſed quod probabilius, aut ſaltem æquè probabiliter, poterat non obtigiſſe; eoque proinde melior vel pejor fortuna, quo minus probabile erat, bonum vel malum hoc eventurum. Sic inſigniter fortunatus eſt ille, qui terram fodiendo theſaurum invenit; quoniam millies fodiendo ne ſemel hoc accidit. Si viginti deſertores, quorum unus cæteris in exemplum ſuſpendio necandus, alea de vita contenderint: propriè non fortunati dicuntur illi novendecim, qui benigniore ſorte ſunt uſi, ſed infortunatiſſimus ille viceſimus, cui ſors atra cecidit. Ita nec fortunatus prædicandus amicus tuus, qui è prælio ſalvus evaſit, in quo exigua præliantium pars occubuit; niſi fortaſſis ob excellentiam boni, quod in vitæ conſervatione conſiſtit, ita vocandum exiſtimes.

CAP. II.

De Scientia & Conjectura. De Arte Conjectandi. De Argumentis Conjecturarum. Axiomata quædam generalia huc pertinentia.

Ea quæ certa ſunt & indubia, dicimur *ſcire* vel *intelligere*: cætera omnia *conjicere* tantùm vel *opinari*.

Conjicere rem aliquam eſt metiri illius probabilitatem: ideoque *Ars Conjectandi* ſive *Stochaſtice* nobis definitur ars metiendi quàm fieri poteſt exactiſſimè probabilitates rerum, eo fine, ut in judiciis & actionibus noſtris ſemper eligere vel ſequi poſſimus id, quod melius, ſatius, tutius aut conſultius fuerit deprehenſum; in quo ſolo omnis Philoſophi ſapientia & Politici prudentia verſatur.

Probabilitates æſtimantur ex *numero* ſimul & *pondere argumentorum*, quæ quoquo modo probant vel indicant, rem aliquam eſſe, fore aut fuiſſe. Per *Pondus* autem intelligo vim probandi.

Argumenta ipſa ſunt vel *intrinſeca*, vulgò artificialia, deſumta ex locis topicis cauſæ, effectus, ſubjecti, adjuncti, ſigni aut alterius cujusvis circumſtantiæ, quæ qualemcunque nexum cum re probandâ habere videtur: vel *extrinſeca* & inartificialia, petita ab authoritate & teſtimonio hominum. Exemplum eſto: Titius occiſus reperitur in viâ, Mævius commiſſi homicidii accuſatur; Argumenta accuſationis ſunt, 1. quòd conſtet illum odio habuiſſe Titium (en argumentum à *cauſa*, potuit enim odium hoc ipſum impuliſſe ad occidendum), 2. quòd examinatus palluerit timideque reſponderit (en argumentum ab *effectu*; poteſt enim pallor & metus iſte ex conſcientia patrati criminis profluxiſſe). 3. quòd in ædibus Mævii repertus mucro ſanguine tinctus (en *ſignum*). 4. quòd quo die occiſus in via Titius, eodem illac tranſierit Mævius (en *circumſtantiam* loci & temporis). 5. quòd denique Cajus deponat, pridie commiſſi homicidii Titio cum Mævio lites interceſſiſſe (en *teſtimonium*).

Priusquam autem propius ad inſtitutum accedamus, oſtendendo, quomodo his argumentis conjecturarum in probabilitatibus metiendis uti conveniat, præmittere lubet generales quasdam Regulas ſeu Axiomata, quæ unicuique ſanæ mentis homini ſimplex ratio dictare ſolet, & quæ in vitæ civilis uſu à prudentioribus etiam perpetuò obſervantur.

1. *Conjecturis locus non eſſe debet in rebus, in quibus omnimodam certitudinem aſſequi licet.* Fruſtra proin eſſet Aſtronomus, qui ex eo quòd quotannis duas vel tres contingere novit Eclipſes, de Plenilunio quodam augurari vellet, num ſit eclipticum, necne; cùm veritatem rei certo calculo conſequi poſſit. Ita ſi fur interrogatus reſponderit, ſe rem ablatam vendidiſſe Sempronio, ineptè ageret Judex, qui ex vultu tonoque loquentis, aut ex qualitate rei furto ablatæ aliisve furti circumſtantiis de probabilitate aſſerti conjicere vellet, quando præſtò eſt Sempronius, è quo rem omnem certò & facilè experiri licebit.

2. *Non ſufficit expendere unum alterumve argumentum, ſed conquirenda*

quirenda ſunt omnia, quæ in cognitionem noſtram venire poſſunt, atq; ullo modo ad probation m rei facere videntur. Tres naves ex. gr. ſolvunt è portu, poſt aliquod tempus nunciatur, unam illarum naufragio periiſſe; conjicitur quænam? ſi ſolum numerum navium ſpectarem, infortunium ſingulis æquè accidere potuiſſe colligerem; ſed quia memini, unam earum præ cæteris carie & vetuſtate fuiſſe exeſam, velis & antennis malè armatam, nauclero quoque novitio & inexperto inſtructam, hanc utique probabilius quàm cæteras interiiſſe judico.

3. *Nec tantùm illa ſunt attendenda, quæ rei probandæ conducunt; ſed & omnia illa, quæ in contrarium adduci poſſunt, ut trutinatis probè utrisq; conſtet utra præponderent.* De amico diutiſſimè à patria abſente quæritur, an pro mortuo declarari poſſit? Pro affirmativa militant hæc argumenta: Quòd omni licet adhibita cura toto vicennio nihil de illo innotuit: quòd peregrinantes plurimis vitæ periculis expoſiti ſunt, quibus exempti hi qui domi manent; fortè igitur in undis finiit vitam, fortè occiſus in via, fortè in prælio, fortè morbo aut caſu aliquo obiit in loco, ubi nemini fuit notus: quòd si in vivis eſſet, ejus jam ætatis eſſe deberet, quam pauci vel domi attingunt: quòd ſcripturus fuiſſet, etiamsi in extremis Indiæ oris verſaretur, quia ſcivit ſe hæreditatem expectare domi: & quæ ſunt alia. Quibus tamen argumentis non eſt acquieſcendum, ſed opponenda quoque ſequentia, quæ negativam tuentur. Conſtat, hominem fuiſſe ſocordem, ægrè arripuiſſe calamum, amicos contempſiſſe; fortè à Barbaris captivus ductus, ut ſcribere non potuerit; fortè etiam ſcripſit ex India aliquoties, ſed literæ vel incuria latorum vel naufragio periêre; conſtat denique, multos diutius emanſiſſe, & tamen tandem rediiſſe incolumes.

4. *Ad judicandum de univerſalibus ſuffi iunt argumenta remota & univerſalia; ſed ad conjecturas formandas de individuis, propiora quoq; & ſpecialia adjungenda ſunt, ſi modo haberi poſſunt.* Ita cùm quæritur in abſtracto, quantò ſit probabilius, juvenem viginti annorum ſeni ſexagenario fore ſuperſtitem, quàm verò hunc illi, præter diſcrimen ætatis & annorum nihil eſt, quod conſiderare poſſis; ſed ubi ſpecialiter ſermo eſt de individuis Petri juvenis & Pauli ſenis, attendere inſuper oportet ad ſpecialem eorum complexionem & ſtudium, quo uterque vale-

valetudinem ſuam curat; nam ſi Petrus ſit valetudinarius, ſi affectibus indulgeat, ſi intemperanter vivat, fieri poteſt, utPaulus, etsi ætate provectior, optima tamen ratione longioris ſpem vitæ concipere valeat.

5. *In rebus incertis & dubiis actiones noſtræ ſuſpendendæ ſunt, donec major lux affulſerit; ſed ſi occaſio agendi nullam patiatur moram, inter du[illegible] ſemper eligendum id, quod convenientius, tutius, conſultius aut probabilius videtur, etſi neutrum in poſitivo tale ſit.* Sic in oborto incendio, è quo aliter elabi non poſſis, niſi vel ex ſummo tecto vel ex inferiore quadam contignatione te præcipitem des, præſtabit poſterius eligere, quia tutius; etsi neutrum ſimpliciter tutum ſit, aut ſine læſionis periculo fieri poſſit.

6. *Quod aliquo caſu prodeſſe, nullo nocere poteſt, præferendum eſt illi, quod nullo vel prodeſt vel nocet*; quorſum collimat illud, quod vernaculè dicimus: Hilfft es nicht / ſo ſchadt es nicht. Fluit ex præcedenti; nam quod prodeſſe poteſt, cæteris paribus ſatius, tutius, optabilius eſt illo, quod non poteſt.

7. *De Actionum humanarum pretio non ſtatuendum ex eventu*; cùm ſtolidiſſimæ actiones quandoque optimo, prudentiſſimæ contra peſſimo ſucceſſu fruantur; hinc Poëta: *Careat ſucceſſibus, opto, quisquis ab eventu facta notanda putat.* Ita ſi quis tribus teſſeris prima vice tres ſenarios jacere ſuſcipit, etiamſi fortaſſe vincat, ſtolidè tamen egiſſe cenſetur. Notandum contra perverſa vulgi judicia, cui præſtantior habetur, quò quiſque eſt fortunatior; imò cui proſperum ac felix ſcelus plerunque virtus vocatur, de quo rurſum eleganter Ovvenus:

Epigr. lib. ſing. §. 216.

Quòd malè conſultum cecidit feliciter, Ancus
  Arguitur ſapiens, qui modo ſtultus erat;
Quod prudenter erat proviſum, ſi malè vortat,
  Ipſe Cato populo judice ſtultus erit.

8. *In judiciis noſtris cavendum, ne rebus plus tribuamus quàm par eſt, neque quod probabilius eſt cæteris, pro abſolutè certo habeamus ipſi aut obtrudamus aliis.* Oportet enim, ut fides, quam rebus tribuimus, proportionata

tionata ſit gradui certitudinis, quam unaquæque res obtinet atque adeo in eadem ratione minor, qua minor eſt ipſa rei probabilitas; quod vernaculè ſic enunciamus; Man muß ein jedes in ſeinem Werth und Unwerth beruhen laſſen.

9. *Quia tamen rarò admodum omnimodam certitudinem aſſequi licet, neceſſitas & uſus volunt, ut quod moraliter tantùm certum eſt, pro abſolutè certo habeatur*. Utile proin eſſet ſi Magiſtratus auctoritate morali certitudini determinati limites conſtituerentur; putà si definiretur, num ad illam efficiendam ſufficiant $\frac{99}{100}$, an requirantur $\frac{999}{1000}$ certitudinis; ne partium ſtudio aliquid dare poſſit Judex, ſed cynoſuram habeat, quam in ferenda ſententia conſtanter obſervet.

Plura ejusmodi Axiomata alia unusquiſque quotidiano rerum uſu edoctus proprio marte ſibi cudere poterit, quorum omnium nos extra datam occaſionem difficulter meminiſſe poſſemus.

CAPUT III.

De variis argumentorum generibus, & quomodo eorum pondera æſtimentur ad ſupputandas rerum probabilitates.

Qui varia argumenta examinat, quibus opinio vel conjectura generatur, triplex in iis diſcrimen animadvertet: nam quædam eorum *neceſſariò exiſtunt & contingenter indicant*: alia *contingenter exiſtunt & neceſſariò indicant*: alia denique *contingenter exiſtunt ſimul & indicant*. Diſcrimen declaro exemplis: Frater meus diu nihil ad me literarum dedit; dubito, an ejus ſegnities aut negotia in culpa ſint; vereor etiam ne planè fato conceſſerit. Hìc intermiſſæ ſcriptionis argumenta ſunt tria: *Segnities*, *Mors* & *Negotia*; quorum primum exiſtit neceſſariò, (neceſſitate hypothetica, quia fratrem ſcio ponoq; ſegnem eſſe) ſed indicat contingenter; potuiſſet enim ſegnities hæc ipſum non cohibere à ſcribendo: ſecundum contingenter exiſtit, (poteſt enim frater adhuc in vivis eſſe) at neceſſariò indicat, cùm mortuus

ſcribere non poſſit: tertium & contingenter exiſtit & contingenter indicat; poſſet enim ille habere & non habere negotia, & ſi quæ habet, poſſunt tanta non eſſe, quæ ipſum de ſcriptione detineant. Aliud exemplum: Pono aleatorem, cui ex ludi præſcripto præmium debeatur, ſi teſſeris duabus ſeptem puncta jecerit, voloque conjicere, quam talis vincendi ſpem habeat. Hîc argumentum victoriæ eſt jactus ſeptenarii, qui illam indicat neceſſariò, (neceſſitate nimirum pacti inter colluſores initi) ſed tantùm exiſtit contingenter; cùm præter ſeptenarium & alii punctorum numeri cadere poſſint.

Præter hanc argumentorum diſtinctionem aliud quoque in iis diſcrimen obſervare licet, dum quædam eorum ſunt *pura*, alia *mixta*. *Pura* voco, quæ in quibusdam caſibus ita rem probant, ut in aliis nihil poſitivè probent: *Mixta*, quæ ita rem probant in caſibus nonnullis, ut in cæteris probent contrarium rei. Exemplum eſto: Si in turba tumultuantium quidam gladio fuerit confoſſus, & teſtimonio hominum fide dignorum eminus adſpectantium conſtet, huic nigram fuiſſe chlamydem qui facinus commiſit, reperiaturque inter tumultuantes Gracchus cum tribus aliis ejus coloris tunicâ indutus; erit hæc tunica argumentum aliquod commiſſæ à Graccho cædis, ſed mixtum; quoniam uno caſu ejus culpam, tribus caſibus ejus innocentiam probat, prout videl. vel ab ipſo vel ab uno reliquorum trium cædes patrata fuerit; nec enim ab iſtis patrari potuit, quin eo ipſo Gracchus ponatur innocens. Quòd ſi verò in ſubſecuto examine Gracchus palluerit, pallor hic faciei eſt argumentum purum: probat enim Gracchi culpam, ſi à læſâ conſcientia proficiſcatur; ſed non viciſſim probat ejus innocentiam, ſi aliunde proveniat; poteſt enim fieri, ut alia de cauſâ palleſcat Gracchus, & tamen ipſe ſit auctor cædis.

Ex iis, quæ hactenus dicta ſunt, perſpicuum eſt, vim probandi, qua pollet quodlibet argumentum, pendere à multitudine caſuum, quibus illud exiſtere vel non exiſtere, indicare vel non indicare, aut etiam contrarium rei indicare poteſt; adeoque gradum certitudinis ſeu probabilitatem, quam generat hoc argumentum, ex caſibus iſtis per Doctrinam primæ Partis non aliter elici poſſe, quàm ſortes aleatorum in ludis aleæ inveſtigari ſolent. Ad quod oſtendendum ſumamus numerum caſuum, quibus contingere poteſt ut argumentum a-

liquod

liquod exiſtat, eſſe b; eorum, quibus fieri poteſt ut non exiſtat, c; amborum $a \infty b+c$; item numerum caſuum, quibus contingere poteſt ut indicet, β; ut non indicet, aut contrarium rei indicet, γ; amborum $\alpha \infty \beta+\gamma$. Pono autem, omnes caſus æquè poſſibiles eſſe, ſeu pari facilitate evenire poſſe; alias enim moderatio eſt adhibenda, & pro quovis caſu faciliori tot alii caſus numerandi ſunt, quoties is cæteris facilius evenit: ex. gr. pro caſu triplo faciliori numero tres caſus, qui pari cum cæteris facilitate contingere poſſint.

1. Itaque ſit primò argumentum *contingenter exiſtens & neceſſariò indicans:* erunt ex modo poſitis b caſus, quibus exiſtere adeoque & indicare rem (ſeu 1) poteſt; & c caſus, quibus poteſt non exiſtere, adeoque nec quicquam indicare; id quod per Coroll. 1. Prop. III. primæ Part. valet $\frac{b\cdot 1+c\cdot 0}{a} \infty \frac{b}{a}$, ita ut tale argumentum probet $\frac{b}{a}$ rei ſeu certitudinis rei.

2. Sit deinde argumentum *neceſſariò exiſtens & contingenter indicans*: erunt ex hyp. β caſus, quibus fieri poteſt ut indicet rem, & γ caſus ut non indicet, ſeu ut contrarium indicet; quod vim argumenti ad rem probandam nunc efficit $\frac{\beta\cdot 1+\gamma\cdot 0}{\alpha} \infty \frac{\beta}{\alpha}$: probat ergò hujusmodi argumentum $\frac{\beta}{\alpha}$ certitudinis rei, atque inſuper ſi ſit mixtum (quod eodem modo patet) $\frac{\gamma\cdot 1+\beta\cdot 0}{\alpha} \infty \frac{\gamma}{\alpha}$ certitudinis contrarii.

3. Si quod argumentum *contingenter exiſtit & contingenter indicat*, pono ſtatim exiſtere, quo caſu per modo oſtenſa probare cenſetur $\frac{\beta}{\alpha}$ rei, & inſuper ſi ſit mixtum, $\frac{\gamma}{\alpha}$ contrarii: unde cùm ſint b caſus, quibus exiſtere; & c caſus, quibus non exiſtere, adeoque & nil probare poſſit; valebit hoc argumentum ad rem probandam $\frac{b\cdot\beta:\alpha+c\cdot 0}{a} \infty \frac{b\beta}{a\alpha}$; &, ſi ſit mixtum, ad probandum contrarium $\frac{b\cdot\gamma:\alpha+c\cdot 0}{a} \infty \frac{b\gamma}{a\alpha}$.

 4. Porrò

4. Porrò ſi plura concurrant argumenta ad ejuſdem rei probationem, vocenturque

numeri caſuum, argumenti	*pr.*	*ſec.*	*tert.*	*quart.*	*quint.*	&c.
omnium	*a*	*d*	*g*	*p*	*s*	&c.
probantium	*b*	*e*	*h*	*q*	*t*	&c.
non-probantium aut probant. contr.	*c*	*f*	*i*	*r*	*u*	&c.

vis probandi ex omnium argumentorum concurſu reſultans ſic æſtimatur. Sint autem primò omnia argumenta *pura*; erit primi ſeorſim ſpectati pondus $\frac{b}{a} \infty \frac{a-c}{a}$ (vocando ſic $\frac{\beta}{\alpha}$, ſi contingenter indicet; aut $\frac{b\beta}{a\alpha}$, ſi ſimul contingenter exiſtat) ut vidimus. Accedat nunc alterum argumentum, quod *e* vel $d-f$ caſibus probat rem ſeu 1, & *f* caſibus nil probat, ſolumque adeò pondus primi argumenti, quod oſtenſum eſt eſſe $\frac{a-c}{a}$, efficax relinquit: valebit pondus ex utroq; argumento conflatum $\frac{\overline{d-f}.1 + f.\overline{a-c:a}}{d} \infty \frac{ad-cf}{ad} \infty 1 - \frac{cf}{ad}$ rei. Jungatur & tertium; erunt *h* ſeu $g-i$ caſus, qui probant rem, & *i* caſus, quibus nullum eſt argumentum, ſolaque duo priora vim ſuam probandi $\frac{ad-cf}{ad}$ retinent: unde vis omnium trium cenſetur $\frac{\overline{g-i}.1 + i.\overline{ad-cf:ad}}{g} \infty \frac{adg-cfi}{adg} \infty 1 - \frac{cfi}{adg}$. Et ita deinceps, ſi plura præſtò ſint argumenta. E quibus patet, quòd omnia junctim ſumta probabilitatem inducunt, quæ ab abſoluta rei certitudine ſeu unitate deficiat parte unitatis, orta ex diviſione producti caſuum non probantium per productum caſuum omnium in univerſis argumentis.

5. Sint deinde omnia argumenta *mixta*: Quoniam numerus caſuum probantium primi argumenti eſt *b*, ſecundi *e*, tertii *h*, &c. & probantium contrarium *c*, *f*, *i*, &c. probabilitas rei ad probabilitatem contrarii, vi ſolius primi argumenti, ſe habet ut *b* ad *c*; & vi ſolius ſecundi, ut *e* ad *f*; & vi ſolius tertii, ut *h* ad *i*, &c. unde ſat evidens eſt, quòd vis probandi totalis ex omnium argumentorum concurſu reſultans componatur ex viribus omnium argumentorum

parti-

particularium, i. e. quòd probabilitas rei ad probabilitatem contrarii ſe habeat in ratione beh &c. ad cfi &c. adeò ut probabilitas abſoluta rei ſit $\frac{beh}{beh+cfi}$, & probabilitas abſoluta contrarii $\frac{cfi}{beh+cfi}$.

6. Sint rurſus quædam argumenta *pura* (velut tria priora) & quædam *mixta* (ut duo reliqua). Conſidero primò ſola pura, quæ per §. 4. probant $\frac{adg-cfi}{adg}$ certitudinis rei, defectu ad unitatem exiſtente $\frac{cfi}{adg}$; ſunt ergò velut $adg-cfi$ caſus, quibus tria hæc argumenta junctim ſumta probant rem ſeu 1; & cfi caſus, quibus nil probant, ſolisque proin argumentis mixtis locum probandi concedunt: probant autem hæc duo per præced. §. 5, $\frac{qt}{qt+ru}$ rei, & $\frac{ru}{qt+ru}$ contrarii. Quare probabilitas rei ex omnibus argumentis reſultans eſt $\frac{\overline{adg-cfi}.1+cfi.qt:\overline{qt+ru}}{adg} \infty \frac{adgqt+adgru-cfiru}{adgqt+adgru} \infty 1-\frac{cfiru}{adg.\overline{qt+ru}}$, quæ ab omnimoda certitudine ceu unitate deficit producto partis $\frac{cfi}{adg}$ (qua ab eadem deficit probabilitas rei per §. 4. ex ſolis argumentis puris reſultans) per $\frac{ru}{qt+ru}$ probabilitatem abſolutam contrarii per præced. §. 5. ex argumentis mixtis elicitam.

7. Quòd ſi præter argumenta quæ rei probandæ conducunt, alia ſe offerunt argumenta pura, quibus contrarium ſuadetur, utriuſque generis argumenta per præced. regulas ſeorſim ponderanda ſunt, ut inde conſtare poſſit ratio, quæ inter probabilitatem rei & probabilitatem contrarii intercedit. Ubi notandum, ſi argumenta, quæ in utramque partem afferuntur ſunt ſatis fortia, fieri poſſe, ut abſoluta probabilitas utriusque partis ſemiſſem certitudinis notabiliter ſuperet, h. e. ut utrumque contrariorum reddatur probabile, etſi relativè loquendo unum ſit minus probabile altero; ſic fieri poteſt, ut quidpiam habeat $\frac{2}{3}$ certitudinis, dum ejus contrarium poſſidet $\frac{3}{4}$; quo pacto utrumque contrariorum erit probabile, & tamen prius minus probabile ſuo contrario, idque in ratione $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, ſive 8 ad 9.

Diſſimulare hic non poſſum, quòd in ſpeciali applicatione harum

rum regularum multa occurſura prævideo, quæ in cauſa eſſe queunt, ut turpiter ſæpe quis hallucinetur, niſi in diſcernendis argumentis cautè procedat: quandoque enim diſtincta videri poſſunt argumenta, quæ reapſe unum idemque argumentum conſtituunt; aut vice verſâ unum videntur, quæ diſtincta ſunt; nonnunquam ponuntur in argumento talia, quæ argumentum contrarii planè evertunt; &c. In cujus rei illuſtrationem unum tantùm alterumve exemplum adducam. Pono in ſupra allato exemplo Gracchi, homines hos fide dignos, qui tumultuantes viderunt, in Auctore cædis rufos inſuper capillos obſervaſſe, talique capillitio Gracchum cum duobus aliis notari, ſed quorum neuter nigra toga ſit veſtitus. Hic, ſi quis ex iſtis indiciis, quòd præter Gracchum tres ſint atro colore veſtiti, & præter eundem duo rufis capillis inſignes, colligere vellet probabilitatem culpæ ad probabilitatem innocentiæ in perſona Gracchi per §. 5. ſe habere in ratione compoſita ex ſubtripla & ſubdupla, h.e. in ratione ſubſextupla, illumque adeo veriſimilius multo innocentem eſſe, quàm reum facinoris, is utique ineptè colligeret; cùm hic propriè non adſint duo argumenta, ſed unum tantùm idemque à duabus ſimul circumſtantiis coloris veſtium & capillorum petitum, quæ duæ circumſtantiæ cùm in ſola perſonâ Gracchi junctim conveniant, arguünt certò non alium quàm ipſum auctorem cædis eſſe potuiſſe. Aliud exemplum eſto: De Contractu quodam ſcripto dubium movetur, an dies inſtrumento appoſitus fraudulenter ſit anticipatus? Argumentum pro negativa hoc eſſe poteſt, quòd inſtrumentum ſignatum ſit manu Notarii, i.e. perſonæ publicæ & juratæ, quem non veriſimile eſt quicquam commiſiſſe fraudis, cùm id ſine ſummo honoris ac fortunæ ſuæ periculo facere non potuiſſet, ac propterea etiam inter 50 vix unus reperiatur, qui iſthuc nequitiæ procedere audeat. Argumenta vero pro affirmativa poſſunt eſſe, quòd Notarii hujus fama peſſimè audiat, quòd ex fraude maximum expectare potuit lucrum, & præſertim quòd talia atteſtetur, quæ nihil probabilitatis habent, veluti ſi ſcripſiſſet, quendam alteri mutuò locaſſe 10000 aureos, eo tempore, quo ex omnium æſtimatione vix centum in univerſis bonis habere poterat. Hic ſi argumentum à charactere ejus qui ſubſcripſit petitum ſeorſim conſideres, cenſere poteris probabi-

babilitatem authentiæ inſtrumenti velut $\frac{49}{50}$ certitudinis valere. Sin argumenta in contrarium expendas, agnoſcere teneris fieri vix poſſe, quin inſtrumento falſum inſit, adeoque fraudem in illo commiſſam moralem planè certitudinem, h.e. velut $\frac{999}{1000}$ certitudinis habere. Inde verò concludi non debet, probabilitatem authentiæ ad probabilitatem fraudis per §. 7. eſſe in ratione $\frac{49}{50}$ ad $\frac{999}{1000}$, hoc eſt, in ratione penè æqualitatis; dum enim Notarium pono diffamatæ fidei, hoc ipſo pono, eum non comprehendi in caſu horum 49 proborum Notariorum, qui fraudes deteſtantur; ſed eſſe ipſum illum quinquageſimum, qui ſibi religioni non ducit, perfidè in officio ſuo verſari: id quod vim omnem illius argumenti, quod alias authentiam inſtrumenti probare poſſet, prorſus tollit ac deſtruit.

CAPUT IV.

De duplici Modo inveſtigandi numeros caſuum. Quid ſentiendum de illo, qui inſtituitur per experimenta. Problema ſingulare eam in rem propoſitum: &c.

Oſtenſum eſt in Capite præced. quomodo ex numeris caſuum, quibus rerum quarumvis argumenta exiſtere vel non exiſtere, indicare vel non indicare, aut etiam contrarium indicare poſſunt, ipſorum vires probandi iisque proportionatæ rerum probabilitates calculo ſubduci & æſtimari queant. Eò itaque deventum eſt, ut ad conjecturas de re qualibet ritè formandas aliud nil requiratur, quàm ut tùm numeri horum caſuum accuratè determinentur, tum & definiatur, quanto facilius alii aliis accidere poſſint. At hîc tandem nobis aqua hærere videtur, cùm vix in pauciſſimis præſtare hoc liceat, nec alibi ferè ſuccedat, quàm in aleæ ludis, quos primi inventores ad æquitatem ipſis conciliandam data opera ſic inſtituerunt, ut certi notique eſſent numeri caſuum, ad quos ſequi debet lucrum aut damnum, & ut caſus hi omnes pari facilitate obtingere poſſent. In cæteris enim pleriſque vel à naturæ operatione vel ab hominum arbitrio pendentibus effectis id neutiquam locum habet. Ita ex. gr.

noti

noti ſunt numeri caſuum in teſſeris; in ſingulis enim tot manifeſtè ſunt quot hedræ, iique omnes æquè proclives; cùm propter ſimilitudinem hedrarum & conforme teſſeræ pondus nulla ſit ratio, cur una hedrarum pronior eſſet ad cadendum quàm altera, quemadmodum fieret, si hedræ diſſimilis forent figuræ, aut teſſera una in parte ex ponderoſiore materia conſtaret quàm in altera. Sic itidem noti ſunt numeri caſuum ad educendam ex urna ſchedulam albam nigramve, & notum eſt omnes æquè poſſibiles eſſe; quia nimirum determinati notique ſunt numeri ſchedarum utriusque generis, nullaque perſpicitur ratio, cur hæc vel illa potius exire debeat quàm quælibet alia. At quis cedo mortalium unquam definiet numerum ex. gr. morborum, veluti totidem caſuum, qui innumeras corporis humani partes quavis ætate invadere, mortemque nobis inferre valent; & quantò facilius hic quàm ille, peſtis quàm hydrops, hydrops quàm febris, hominem perimat, ut inde de futuro vitæ necisque ſtatu conjectura formari poſſit? Quis item recenſebit caſus innumeros mutationum, quibus aër quotidie obnoxius eſt, ut inde conjicere poſſit, quænam poſt menſem, nedum poſt annum, ejus futura ſit conſtitutio? Rurſus, quis mentis humanæ naturam, aut admirabilem corporis noſtri fabricam ſatis perſpectam habuerit, ut in ludis, qui ab illius acumine aut hujus agilitate in totum vel ex parte dependent, determinare audeat caſus, quibus hic vel ille ludentium victoria potiri vel excidere poſſit? Hæc enim & talia cùm dependeant à cauſis omnino latentibus, atque inſuper innumerabili complexionum varietate induſtriam noſtram æternum luſuris, inſanientis planè foret, quicquam hoc pacto cognoſcere velle.

Verum enimverò alia hîc nobis via ſuppetit, quâ quæſitum obtineamus; & quod à priori elicere non datur, ſaltem *à poſteriori*, hoc eſt, ex eventu in ſimilibus exemplis multoties obſervato eruere licebit; quandoquidem præſumi debet, tot caſibus unumquodque poſthac contingere & non contingere poſſe, quoties id antehac in ſimili rerum ſtatu contigiſſe & non contigiſſe fuerit deprehenſum. Nam ſi ex. gr. facto olim experimento in tercentis hominibus ejusdem, cujus nunc Titius eſt, ætatis & complexionis, obſervaveris ducentos eorum ante exactum decennium mortem oppetiiſſe, reliquos ultra vitam

tam protraxiſſe, ſatis tuto colligere poteris, duplo plures caſus eſſe, quibus & Titio intra decennium proximum naturæ debitum ſolvendum ſit, quàm quibus terminum hunc transgredi poſſit. Ita ſi quis à plurimis retrò annis ad cœli tempeſtatem attenderit, notaveritque, quoties ea ſerena aut pluvia extiterit: aut si quis duobus ludentibus ſæpiſſimè adſtiterit, videritque quoties hic aut ille ludi victor evaſerit, eo ipſo rationem detexerit, quam probabiliter habent inter ſe numeri caſuum, quibus iidem eventus præviis ſimilibus circumſtantiis & poſthac contingere ac non contingere poſſunt.

Atque hic modus empiricus determinandi numeros caſuum per experimenta neque novus eſt neque inſolitus; nam & Celeb. Auctor Artis cogitandi magni acuminis & ingenii Vir Cap. 12. & ſeqq. poſtremæ Partis haud diſſimilem præſcribit, & omnes in quotidiana praxi eundem conſtanter obſervant. Deinde nec illud quenquam latere poteſt, quòd ad judicandum hoc modo de quopiam eventu non ſufficiat ſumſiſſe unum alterumque experimentum, ſed quòd magna experimentorum requiratur copia; quando & ſtupidiſſimus quiſque neſcio quo naturæ inſtinctu per ſe & nulla prævia inſtitutione (quod ſanè mirabile eſt) compertum habet, quo plures ejuſmodi captæ fuerint obſervationes, eò minus à ſcopo aberrandi periculum fore. Quanquam autem hoc naturaliter omnibus notum ſit, demonſtratio, qua id ex artis principiis evincitur, minimè vulgaris eſt, & proin nobis hìc loci tradenda incumbit: ubi tamen parum me præſtiturum exiſtimarem, ſi in hoc uno, quod nemo ignorat, demonſtrando ſubſiſterem. Ulterius aliquid hìc contemplandum ſupereſt, quod nemini fortaſſis vel cogitando adhucdum incidit. Inquirendum nimirum reſtat, an aucto ſic obſervationum numero ita continuò augeatur probabilitas aſſequendæ genuinæ rationis inter numeros caſuum, quibus eventus aliquis contingere & quibus non contingere poteſt, ut probabilitas hæc tandem datum quemvis certitudinis gradum ſuperet: an verò Problema, ut ſic dicam, ſuam habeat Aſymptoton, h. e. an detur quidam certitudinis gradus quem nunquam excedere liceat, utcunque multiplicentur obſervationes, putà, ut nunquam ultra ſemiſſem, aut $\frac{2}{3}$, aut $\frac{3}{4}$ certitudinis partes certi fieri poſſimus, nos veram caſuum rationem detexiſſe. Ut exemplo conſtet quid velim, pono

no in urna quadam te inſcio reconditos eſſe ter mille calculos albos & bis mille nigros, teque eorum numerum experimentis exploraturum educere calculum unum poſt alterum (reponendo tamen ſingulis vicibus illum quem eduxiſti, priusquam ſequentem eligas, ne numerus calculorum in urna minuatur) & obſervare, quoties albus & quoties ater exeat. Quæritur, utrum toties hoc facere poſſis, ut decuplo, centuplo, millecuplo &c. probabilius fiat (h.e. ut moraliter tandem certum evadat) numeros vicium, quibus album & quibus nigrum eligis, eandem rationem ſeſquialteram, qua ipſi calculorum ceu caſuum numeri gaudent, inter ſe habituros, quàm aliam quamlibet rationem ab iſta diverſam? Nisi enim hoc fiat, fateor actum fore de noſtro conatu explorandi numeros caſuum per experimenta. At ſi id obtineat, acquiraturque tandem hoc pacto moralis certitudo (quemadmodum hoc etiam reapſe fieri ſequenti Capite oſtendam) æquè propemodum exploratos habebimus *à poſteriori* caſuum numeros, acſi nobis à priori cogniti eſſent; quod ſane in uſu vitæ civilis, ubi moraliter certum pro abſolute certo habetur, per Ax. 9. Cap. II. abunde ſufficit ad conjecturas noſtras in quavis materia contingente non minus ſcientificè dirigendas, atque in ludis aleæ: etenim ſi loco urnæ ſubſtituamus aërem, ex. gr. ſive corpus humanum, quæ fomitem variarum mutationum atque morborum intra ſe, velut urna calculos, continent, poterimus utique eodem modo per obſervationes determinare, quanto facilius in iſtis ſubjectis hic vel ille eventus accidere poſſit.

Ne autem hæc ſecus intelligantur quàm oportet, probè notandum eſt, quòd rationem inter numeros caſuum, quam experimentis determinare aggredimur, non præcisè & in indiviſibili acceptam velim (ſic enim contrarium prorſus eveniret, eoque minus probabile fieret, veram rationem inventam eſſe, quo plures caperentur obſervationes) verum rationem in aliqua latitudine ſumtam, i. e. binis limitibus concluſam, ſed qui tam arcti conſtitui poſſunt, quàm quis voluerit. Nimirum, ſi in exemplo calculorum modo allato duas rationes aſſumamus $\frac{301}{200}$ & $\frac{299}{200}$, vel $\frac{3001}{2000}$ & $\frac{2999}{2000}$, &c. quarum una proximè major, altera proximè minor eſt ſeſquialtera, oſtendetur quòd data quavis probabilitate probabilius fieri poſſit, rationem per experimenta

rimenta crebro repetita inventam intra hos limites rationis ſesquialteræ, quàm extra caſuram eſſe.

Hoc igitur eſt illud Problema, quod evulgandum hoc loco propoſui, poſtquam jam per vicennium preſſi, & cujus tum novitas, tum ſumma utilitas cum pari conjuncta difficultate omnibus reliquis hujus doctrinæ capitibus pondus & pretium ſuperaddere poteſt. Ejus autem ſolutionem priuſquam tradam, paucis objectiones diluam, quas Viri quidam docti contra hæc placita moverunt.

1. Objiciunt primò, aliam eſſe rationem calculorum, aliam morborum aut mutationum aëris; illorum numerum determinatum eſſe, horum indeterminatum & vagum. Ad quod reſpondeo, utrumque reſpectu cognitionis noſtræ æquè poni incertum & indeterminatum; ſed quicquam in ſe & ſua natura tale eſſe, non magis à nobis poſſe concipi, quàm concipi poteſt, idem ſimul ab Auctore naturæ creatum eſſe & non creatum: quæcunque enim Deus fecit, eo ipſo dum fecit, etiam determinavit.

2. Objiciunt ſecundò, calculorum numerum finitum eſſe, morborum &c. infinitum. *Reſp.* ſtupendè vaſtum potius eſſe, quàm infinitum; ſed demus actu infinitum eſſe: notum eſt, quòd etiam inter duo infinita determinata poſſit intercedere ratio, eaque numeris finitis vel accuratè, vel ſaltem quàm proximè quis voluerit, explicabilis. Sic utique circumferentiæ circuli ad diametrum determinata eſt ratio, quæ licet accuratè non exprimatur niſi per numeros cyclicos Ludolphi in infinitum continuatos, ab Archimede tamen, Metio & ipſo Ludolpho limitibus ad uſum ſufficientiſſimè conſtrictis definitur: unde nil impedit, quo minus ratio inter duo infinita, ſed numeris finitis quàm proximè expreſſa, finitis quoque experimentis determinetur.

3. Ajunt tertiò, numerum morborum non manere conſtanter eundem, ſed quotidie novos pullulare. *Reſp.* quin tractu temporis morbi multiplicari queant, inficiari non poſſumus; & certum eſt, eum qui vellet ex obſervationibus hodiernis concludere ad tempora Patrum antediluvianorum, à veritate enormiter aberraturum eſſe. Inde verò nil aliud ſequitur, quàm quòd interdum novæ capiendæ ſunt

f 2 obſer-

obſervationes; quemadmodum capiendæ forent cum calculis, ſi numerus eorum in urna mutari ſupponeretur.

CAPUT V.

Solutio Problematis præcedentis.

Ut prolixæ rem demonſtrationis quâ licet brevitate & perſpicuitate expediam, conabor omnia reducere ad abſtractam Matheſin, depromendo ex illa ſequentia Lemmata, quibus oſtenſis cætera in nuda applicatione conſiſtent.

Lemma 1. Poſita ſerie quotlibet numerorum 0, 1, 2, 3, 4, &c. à nulla ſeu cifra naturali ſe conſequentium ordine, quorum extremus & maximus dicatur $r+s$, intermediorum quiſpiam r, & qui huic ex utraque parte proximè latus cingunt, $r+1$ & $r-1$: ſi continuetur porrò hæc ſeries, donec extimus terminus utcunque multiplex fiat numeri $r+s$, putà donec ſit $nr+ns$, atque in eadem ratione augeantur intermedius r, & ejus laterales $r+1$ & $r-1$; ſic ut eorum loco prodeant nr, $nr+n$ & $nr-n$; ipſaque ſeries initio poſita

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots r-1, r, r+1, \ldots\ldots\ldots r+s.$$

mutetur in hanc

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots nr-n \ldots\ldots nr \ldots\ldots nr+n \ldots\ldots\ldots nr+ns.$$

multiplicabuntur quidem hoc pacto termini ſeriei, tam illi qui medio nr & alterutri limitum $nr+n$ aut $nr-n$ interjacent, quàm illi qui inde à limitibus ad extimos uſque $nr+ns$ aut 0 porrò protenduntur: nunquam tamen (quantumvis magnus aſſumatur numerus n) numerus terminorum ultra limitem majorem $nr+n$ plusquam $s-1$; nec numerus terminorum ultra minorem $nr-n$ pluſquam $r-1$ vicibus ſuperabit numerum horum; qui intermedio nr & alterutro limitum $nr+n$ vel $nr-n$ ſunt concluſi. Nam facta ſubtractione patet, à limite majore ad terminum extremum $nr+ns$ eſſe intervallum terminorum $ns-n$; à limite minore ad alterum extremum 0 intervallum $nr-n$; & ab intermedio numero ad alterutrum limitem intervallum n terminorum. Eſt verò ſemper $ns-n.n::s-1.1$; & $nr-n.n::r-1.1$. Quare conſtat &c.

Lemm.

Lemm. 2. Omnis poteſtas integra alicujus binomii $r+s$ terminis exprimitur uno pluribus, quàm eſt unitatum numerus in poteſtatis indice. Nam Quadratum conſtat terminis tribus, Cubus 4, Biquadratum 5, & ita porrò, ut notum.

Lemm. 3. In qualibet poteſtate hujus binomii (ſaltem cujus index æqualis binomio $r+s \propto t$, aut ejus multiplex, putà $nr+ns \propto nt$) ſi terminum quempiam M nonnulli præcedant, alii ſequantur, & ſit numerus omnium præcedentium ad numerum omnium ſequentium reciprocè, ut s ad r, ſeu quod eodem redit, ſi in illo termino numeri dimenſionum literarum r & s directe ſint, ut ipſæ quantitates r & s, erit ille terminus omnium in eadem poteſtate maximus, illi verò propior ab utravis parte major remotiori ab eadem parte: ſed idem terminus M ad propiorem minorem habebit rationem, quàm (in pari terminorum intervallo) propior ad remotiorem.

Dem. 1. Nota res eſt inter Geometras, quòd poteſtas nt binomii $r+s$, hoc eſt, $\overline{r+s}^{nt}$ hâc ſerie exprimitur:

$$r^{nt} + \frac{nt}{1} r^{nt-1} s + \frac{nt.nt-1}{1.2} r^{nt-2} ss + \frac{nt.nt-1.nt-2}{1.2.3} r^{nt-3} s^3 + \text{\&c.}$$

uſque ad $+ \frac{nt}{1} rs^{nt-1} + s^{nt}$; in cujus progreſſu pars una binomii r dimenſionibus ſuis gradatim minuitur, pars altera s augetur, exiſtentibus interea coëfficientibus ſecundi & penultimi termini $\frac{nt}{1}$, 3ti & antepenultimi $\frac{nt.nt-1}{1.2}$, 4ti & proantepenultimi $\frac{nt.nt-1.nt-2}{1.2.3}$, & ſic deinceps. Et quia numerus omnium præter M terminorum per Lemm. 2. eſt $nt \propto nr+ns$, ex hypoth. autem numerus ipſum præcedentium ad numerum ſequentium ſe habet, ut s ad r, erit numerus eorum, qui terminum M præcedunt, ns; & qui ipſum ſequuntur, nr. Unde ex lege progreſſionis terminus M fiet

$$\frac{nt.nt-1.nt-2\ldots nt-ns+1(nr+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots ns} r^{nr} s^{ns}, \text{ vel}$$

$$\frac{nt.nt-1.nt-2\ldots nt-nr+1(ns+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots nr} r^{nr} s^{ns};$$

& ſimiliter terminus huic proximus ad

ſiniſtram: | *dextram:*

$$\frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\ldots\overline{nr+2}}{1.2.3.4\ldots\ldots\overline{ns-1}}\,r^{nr+1}\,s^{ns-1}\quad\Big|\quad\frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\overline{ns+2}}{1.2.3.4\ldots\ldots\overline{nr-1}}\,r^{nr-1}\,s^{ns+1};$$

necnon ſequens verſus *ſiniſtram:* | *dextram:*

$$\frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\overline{nr+3}}{1.2.3.4\ldots\overline{ns-2}}\,r^{nr+2}\,s^{ns-2}\quad\Big|\quad\frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\overline{ns+3}}{1.2.3.4\ldots\overline{nr-2}}\,r^{nr-2}\,s^{ns+2};$$

è quibus, præmiſſa ubique convenienti reductione tam coëfficientium quàm terminorum purorum per diviſores communes, patebit, quòd terminus M ad proximum verſus ſiniſtram ſe habet, ut $\overline{nr+1}.s$ ad $ns.r$, hic ad ſequentem, ut $\overline{nr+2}.s$ ad $\overline{ns-1}.r$ &c. nec non terminus M ad proximum verſus dextram, ut $\overline{ns+1}.r$ ad $nr.s$; & hic ad ſequentem, ut $\overline{ns+2}.r$ ad $\overline{nr-1}.s$. &c. Eſt verò $\overline{nr+1}.s$ $(nrs+s) > ns.r$ (nrs), & $\overline{nr+2}.s$ $(nrs+2s) > \overline{ns-1}.r$ $(nrs-r)$ &c. ut & $\overline{ns+1}.r$ $(nrs+r) > nr.s$ (nrs), & $\overline{ns+2}.r$ $(nrs+2r) > \overline{nr-1}.s$ $(nrs-s)$ &c. ut apparet. Ergò terminus M major proximo ab utravis parte, hic major remotiori ab eadem parte, &c. Q. E. D.

2. Ratio $\frac{nr+1}{ns}$ minor eſt ratione $\frac{nr+2}{ns-1}$, ut patet: ergò & addita communi ratione $\frac{s}{r}$, ratio $\frac{\overline{nr+1}.s}{ns.r} < \frac{\overline{nr+2}.s}{\overline{ns-1}.r}$. Similiter ratio $\frac{ns+1}{nr} < \frac{ns+2}{nr-1}$, ut liquet: igitur addita ratione communi $\frac{r}{s}$, ratio quoque $\frac{\overline{ns+1}.r}{nr.s} < \frac{\overline{ns+2}.r}{\overline{nr-1}.s}$. Sed ratio $\frac{\overline{nr+1}.s}{ns.r}$ eſt illa quam terminus M habet ad proximum verſus ſiniſtram; & $\frac{\overline{nr+2}.s}{\overline{ns-1}.r}$ illa, quam habet hic ad ſequentem: item ratio $\frac{\overline{ns+1}.r}{nr.s}$ eſt ea, quam terminus M habet ad proximum verſus dextram; & $\frac{\overline{ns+2}.r}{\overline{nr-1}.s}$, quam habet hic ad ſequentem; uti modò oſtenſum eſt, & ad cæteros omnes ex æquo concludi poteſt. Quare maximus terminorum M ad propiorem ex utravis parte minorem rationem habet, quàm (in pari terminorum intervallo) propior ad remotiorem ex eadem parte. Q. E. D.

Lemm.

Lemm. 4. In poteſtate binomii, cujus index nt, tantus poteſt concipi numerus n, ut maximus terminorum M ad alios duos L & Λ, intervallo n terminorum ſiniſtrorſum & dextrorſum à ſe diſtantes, rationem acquirat qualibet data majorem.

Dem. Cùm enim in Lemm. præced. terminus M ſit inventus

$$\frac{nt.nt-1.nt-2\ldots\ldots nr+1}{1.2.3.4\ldots\ldots ns}r^{nr}s^{ns}, \text{ vel}$$

$$\frac{nt.nt-1.nt-2\ldots\ldots ns+1}{1.2.3.4\ldots\ldots nr}r^{nr}s^{ns},$$

erit ex lege progreſſionis (addito n ad ultimum factorem coëfficientis in numeratore, & ablato ab ultimo in denominatore; nec non alterius literarum r & s dimenſionibus eodem n auctis, alterius diminutis) terminus

L *ad ſiniſtram:* | Λ *ad dextram.*

$$\frac{nt.nt-1.nt-2\ldots nr+n+1}{1.2.3.4\ldots ns-n}r^{nr+n}s^{ns-n} \quad \Bigg| \quad \frac{nt.nt-1.nt-2\ldots ns+n+1}{1.2.3.4\ldots nr-n}r^{nr-n}s^{ns+n};$$

unde facta convenienti reductione per diviſores communes, reſultat

$$\frac{M}{L}\infty\frac{nr+n.nr+n-1.nr+n-2\ldots nr+1}{ns-n+1.ns-n+2.ns-n+3\ldots ns}\frac{\times s^n}{\times r^n}$$

$$\Bigg|\ \frac{M}{\Lambda}\infty\frac{ns+n.ns+n-1.ns+n-2\ldots ns+1 \times r^n}{nr-n+1.nr-n+2.nr-n+3\ldots nr \times s^n},$$

ſive (dimenſionibus quantitatum r^n & s^n in ſingulos factores, ob æqualem amborum numerum, æqualiter diſtributis)

$$\frac{M}{L}\infty\frac{nrs+ns.nrs+ns-s.nrs+ns-2s\ldots nrs+s}{nrs-nr+r.nrs-nr+2r.nrs-nr+3r\ldots nrs}$$

$$\Bigg|\ \frac{M}{\Lambda}\infty\frac{nrs+nr.nrs+nr-r.nrs+nr-2r\ldots nrs+r}{nrs-ns+s.nrs-ns+2s.nrs-ns+3s\ldots nrs}:$$

ſed hæ rationes ſunt infinitè magnæ, cùm numerus n ponitur infinitus; tunc enim evaneſcunt numeri 1, 2, 3, &c. præ n, ipſæque nr 8 n 8 1, 2, 3, &c. & ns 8 n 8 1, 2, 3, &c. tantundem valent, ac nr 8 n & ns 8 n; ſic ut diviſione inſtituta per n, prodeat

$$\frac{M}{L}\infty$$

$\frac{M}{L} \infty \frac{rs+s.rs+s.rs+s.....rs}{rs-r.rs-r.rs-r....rs}$ | $\frac{M}{\Lambda} \infty \frac{rs+r.rs+r.rs+r.....rs}{rs-s.rs-s.rs-s.....rs}$;

quæ quantitates componuntur, ut patet, ex tot rationibus $\frac{rs+s}{rs-r}$ aut $\frac{rs+r}{rs-s}$, quot ſunt factores: at horum numerus eſt n, h. e. infinitus; cùm inter primum $nr+n$, aut $ns+n$, & ultimum $nr+1$ aut $ns+1$ differentia ſit $n-1$. Idcircò rationes iſtæ ſunt infinituplicatæ rationum $\frac{rs+s}{rs-r}$ & $\frac{rs+r}{rs-s}$, ac proinde ſimpliciter infinitæ: qua de ſequela si dubites, concipe infinitos continuè proportionales in ratione $rs+s$ ad $rs-r$, vel $rs+r$ ad $rs-s$; erit primi ad tertium ratio duplicata, primi ad 4^{tum} triplicata, ad 5^{tum} quadruplicata, &c. ad ultimum infinituplicata rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ vel $\frac{rs+r}{rs-s}$: conſtat autem, rationem primi ad ultimum infinitè magnam eſſe, ob ultimum ∞ 0. (*Vid. Coroll. Poſit. noſtræ 6tæ de Seriebus Infinitis.*) Quare etiam conſtat, infinituplicatam rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ vel $\frac{rs+r}{rs-s}$ infinitam eſſe. Oſtenſum itaque eſt, quòd in poteſtate infinitè alta binomii terminus maximus M ad duos L & Λ rationem habeat omni aſſignabili ratione majorem. Q. E. D.

Lemm. 5. Poſitis, quæ in præced. tantus intelligi poteſt numerus n, ut ſumma omnium terminorum ab intermedio & maximo M ad ambos uſque L & Λ incluſivè ſumtorum, ad ſummam omnium reliquorum extra hos limites L & Λ utrinque protenſorum rationem habeat omni data ratione majorem.

Dem. Vocentur termini intra maximum M & limitem ſiniſtrum L, ſecundus à maximo F, tertius G, quartus H, &c. & extra limitem L, ſecundus ab ipſo P, tertius Q, quartus R, &c. Quoniam igitur ratio $\frac{M}{F} < \frac{L}{P}$ & $\frac{F}{G} < \frac{P}{Q}$, & $\frac{G}{H} < \frac{Q}{R}$ &c. per part. 2. Lem. 3. erit quoque viciſſim $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$ &c. Quare cùm poſitio n numero infinito, ratio $\frac{M}{L}$ ſit infinitè magna, per

Lem.

Lem̃. 4. fortius etiam cæteræ rationes $\frac{F}{P}$, $\frac{G}{Q}$, $\frac{H}{R}$, &c. erunt infinitæ; eaque propter & $\frac{F+G+H+\&c.}{P+Q+R+\&c.}$ infinita, h. e. omnes ſimul termini intra maximum M & limitem L contenti infinities majores erunt totidem ſimul terminis extra L porrectis ipsi L proximis. Et quoniam numerus omnium terminorum extra limitem L numerum omnium intra eundem & maximum M non nisi $s-1$ (h. e. non nisi finitis) vicibus ſuperat, per 1. Lem̃. ipſique inſuper termini eo minores evadunt, quo ſunt à limite remotiores, per 1. part. 3. Lem̃. idcirco termini ſimul omnes intra M & L (etiam non computato M) omnes ſimul terminos extra L adhuc infinities ſuperabunt. Similiter autem oſtendetur ab altera parte, quòd omnes intra M & Λ concluſi termini omnes extra Λ porrectos (quorum numerus priorum numerum per Lem̃. 1. non niſi $r-1$ vicibus excedit) infinities ſuperant. Quare denique omnes termini inter utrumque limitem L & Λ comprehensi (demto licet maximo M) omnes omninò terminos extra poſitos iſdem infinities ſuperabunt. Ergo multo magis unà cum maximo. Q. E. D.

Schol. Objici poſſet contra 4. & 5tum Lem̃a, ab his qui ſpeculationibus infiniti non aſſueverunt, quòd etiamsi in caſu numeri n infiniti factores quantitatum, quæ rationes $\frac{M}{L}$ & $\frac{M}{\Lambda}$ exprimunt; nr 8 n 8 1, 2, 3, &c. & ns 8 n 8 1, 2, 3, &c. tantundem valent ac nr 8 n & ns 8 n, evaneſcentibus ratione ſingulorum factorum numeris 1, 2, 3, &c. fieri tamen poſſit, ut omnes collecti vel in ſe ducti (propter infinitum factorum numerum) in infinitum excreſcant, adeoque rationem infinituplicatam rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ aut $\frac{rs+r}{rs-s}$ infinitè diminuant, h. e. finitam reddant. Cui ſcrupulo melius ſatisfacere non poſſum, quàm ſi nunc porro modum oſtendam aſſignandi, reapſe finitum numerum n, ſive finitam poteſtatem binomii, in qua ſumma terminorum intra limites L & Λ ad ſummam terminorum extra, rationem habeat data ratione quantumvis magna, quam litera c deſigno, majorem; utpote quo oſtenſo objectionem ultro corruere neceſſe eſt.

Hunc in finem aſſumo rationem quamlibet majoris inæqualitatis, quæ tamen ſit minor ratione $\frac{rs+s}{rs-r}$ (pro terminis ad partem ſiniſtram) puta rationem $\frac{rs+s}{rs}$ ſeu $\frac{r+1}{r}$, eamque toties (m vicibus) multiplico, quoad æquet vel ſuperet rationem $c.\overline{s-1}$ ad 1, hoc eſt, ut ſit $\frac{\overline{r+1}^m}{r^m} \infty$ vel $> c.\overline{s-1}$. Quoties autem id fieri debeat, compendioſè inveſtigatur per logarithmos; nam ſumtis quantitatum logarithmis fit $mL\overline{r+1} - mLr \infty$ vel $> Lc.\overline{s-1}$, & diviſione peracta ſtatim habetur $m \begin{smallmatrix}\infty\\ >\end{smallmatrix} \frac{Lc.\overline{s-1}}{L\overline{r+1}-Lr}$; quo invento ſic pergo: In ſerie illa fractionum ſive factorum, $\frac{nrs+ns}{nrs-nr+r}$. $\frac{nrs+ns-s}{nrs-nr+2r}$. $\frac{nrs+ns-2s}{nrs-nr+3r}$ . . . . . $\frac{nrs+s}{nrs}$, è quorum ductu per Lem. 4. reſultat ratio $\frac{M}{L}$, obſervare licet, quòd ſingulæ fractiones ſint minores quàm $\frac{rs+s}{rs-r}$, ita tamen ut ad hanc continuè propius accedant, quo major ſumitur n: itaque quælibet earum aliquando fiet æqualis ipſi $\frac{rs+s}{rs} \infty \frac{r+1}{r}$; Quare videndum, quantus ſit accipiendus valor n, ut fractio (cujus numerus ordinis eſt m) æquetur ipſi $\frac{r+1}{r}$. Eſt verò (ut ex progreſſionis lege perſpicuum fit) fractio ordine m hæc: $\frac{nrs+ns-ms+s}{nrs-nr+mr}$, quæ adæquata fractioni $\frac{r+1}{r}$, dat $n \infty m + \frac{ms-s}{r+1}$, & inde $nt \infty mt + \frac{mst-st}{r+1}$. Dico, hunc eſſe indicem poteſtatis, ad quam si elevetur binomium $r+s$, futurum ut terminus maximus M ſuperet limitem L plus quàm $c.\overline{s-1}$ vicibus. Nam quia fractio ordine m per hanc aſſumtionem numeri n fit $\frac{r+1}{r}$, per hypoth. & verò $\frac{r+1}{r}$ fractio ſecum ipſa m vicibus multiplicata, h. e. $\frac{\overline{r+1}^m}{r^m}$, per conſtr. æquet vel ſuperet $c.\overline{s-1}$,

ſit ut hæc fractio in omnes præcedentes fractiones ducta multo magis excedat $c.\overline{s-1}$; cùm ſingulæ præcedentium majores ſint quàm $\frac{r+1}{r}$. Ergo magis adhuc ſuperabit $c.\overline{s-1}$, quando ducitur una cum præcedentibus in omnes etiam conſequentes, utpote quarum ſingulæ ſaltem æqualitatis rationem excedunt. Sed productum omnium harum fractionum rationem exhibet termini M ad L; igitur omnino conſtat, terminum M ſuperare limitem L plus quàm $c.\overline{s-1}$ vicibus. Jam autem $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$ &c. ut oſtenſum. Hinc multo magis ſecundus à maximo M ſecundum à limite L plus quàm $c.\overline{s-1}$ vicibus ſuperabit, & magis adhuc tertius tertium, &c. Itaque tandem omnes termini intra maximum M & limitem L ſuperant totidem è maximis extra hunc limitem plus quàm $c.\overline{s-1}$ vicibus; adeoque ſuperant totidem illorum $s-1$ vicibus ſumtos plus quàm c vicibus. Ergo multo evidentius ſuperant omnes extra limitem L, quorum non niſi $s-1$ vicibus plures ſunt, plus quàm c vicibus.

Pro terminis dextimis pari modo procedo: Aſſumo rationem $\frac{s+1}{s} < \frac{rs+r}{rs-s}$, & facio $\frac{\overline{s+1}^m}{s^m} \geqq c.\overline{r-1}$, invenioq; $m \geqq \frac{Lc.\overline{r-1}}{Ls+1-Ls}$. Deinde, in ſerie fractionum $\frac{nrs+nr}{nrs-ns+s}$. $\frac{nrs+nr-r}{nrs-ns+2s}$. $\frac{nrs+nr-2r}{nrs-ns+3s}$ . . . . . $\frac{nrs+r}{nrs}$, quæ rationem $\frac{M}{\Lambda}$ innuit, pono fractionem, quæ ordine eſt m, nempe $\frac{nrs+nr-mr+r}{nrs-ns+ms} = \frac{s+1}{s}$, indeque elicio $n = m + \frac{mr-r}{s+1}$, ac proin $nt = mt + \frac{mrt-rt}{s+1}$. Quo facto ſimiliter oſtendetur, ut antea, quòd binomio $r+s$ ad hanc poteſtatem ſublato, terminus ejus maximus M ſuperabit limitem Λ plus quàm $c.\overline{r-1}$ vicibus & per conſequens etiam, quòd omnes maximo M & limite Λ concluſi ſuperabunt omnes extra hunc limitem, quorum non niſi $r-1$ vicibus plures ſunt, plus quam c vicibus. Itaque finaliter tandem concludimus, quòd elevato binomio $r+s$ ad poteſtatem, cujus index æquetur majori harum duarum quantitatum $mt + \frac{mst-st}{r+1}$

$\frac{mst-st}{r+1}$ & $mt+\frac{mrt-rt}{s+1}$, omnes ſimul termini inter utrumque limitem L & Λ comprehensi multo pluribus quàm *c* vicibus ſuperabunt omnes ſimul terminos extra limites ab utraque parte protenſos. Reperta igitur eſt finita poteſtas, quæ optatam habeat proprietatem. Q. E. F.

Propoſ. Princip. Sequitur tandem Propoſitio ipſa, cujus gratia hæc omnia dicta ſunt, ſed cujus nunc demonſtrationem ſola Lemmatum præmiſſorum applicatio ad præſens inſtitutum abſolvet. Ut circumlocutionis tædium vitem, vocabo caſus illos, quibus eventus quidam contingere poteſt, *fœcundos* ſeu *fertiles*; & *ſteriles* illos, quibus idem eventus poteſt non contingere: nec non experimenta *fœcunda* ſive *fertilia* illa, quibus aliquis caſuum fertilium evenire deprehenditur; & *infœcunda* ſive *ſterilia*, quibus ſterilium aliquis contingere obſervatur. Sit igitur numerus caſuum fertilium ad numerum ſterilium vel præciſè vel proximè in ratione $\frac{r}{s}$, adeoque ad numerum omnium in ratione $\frac{r}{r+s}$ ſeu $\frac{r}{t}$, quam rationem terminent limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$. Oſtendendum eſt, tot poſſe capi experimenta, ut datis quotlibet (puta *c*) vicibus veriſimilius evadat, numerum fertilium obſervationum intra hos limites quàm extra caſurum eſſe, h. e. numerum fertilium ad numerum omnium obſervationum rationem habiturum nec majorem quàm $\frac{r+1}{t}$, nec minorem quàm $\frac{r-1}{t}$.

Dem. Ponatur numerus capiendarum obſervationum nt, & quæratur, quanta ſit expectatio, ſeu quanta probabilitas, ut omnes exiſtant fœcundæ, exceptis primo nulla, dein una, duabus, 3, 4 &c. ſterilibus. Quandoquidem autem in qualibet obſervatione præſto ſunt ex hyp. *t* caſus, eorumque *r* fœcundi & *s* ſteriles, & ſinguli caſus unius obſervationis cum ſingulis alterius combinari, combinatique rurſus cum ſingulis tertiæ, 4^{tæ} &c. conjungi poſſunt, facile patet, huic negotio quadrare Regulam Annotationibus Prop. XIII.

XIII. primæ Part. in fine ſubnexam, & ejus Corollarium ſecundum, quod univerſalem formulam continet, cujus ope cognoſcitur, quòd expectatio ad nullam obſervationem ſterilem ſit $r^{nt}:t^{nt}$, ad unam $\frac{nt}{1}r^{nt-1}s:t^{nt}$, ad duas ſteriles $\frac{nt.nt-1}{1.2}r^{nt-2}ss:t^{nt}$, ad tres $\frac{nt.nt-1.nt-2}{1.2.3}r^{nt-3}s^3:t^{nt}$, & ſic deinceps; adeoque (rejecto communi nomine t^{nt}) quod gradus probabilitatum ſeu numeri caſuum, quibus contingere poteſt, ut omnia experimenta ſint fœcunda, vel omnia præter unum ſterile, vel omnia præter duo, 3, 4 &c. ſterilia, ordine exprimantur per r^{nt}, $\frac{nt}{1}r^{nt-1}s$, $\frac{nt.nt-1}{1.2}r^{nt-2}ss$, $\frac{nt.nt-1.nt-2}{1.2.3}r^{nt-3}s^3$, &c. ipſiſſimos nempe terminos poteſtatis nt binomii $r+s$, in Lemmatis modo noſtris excuſſæ: unde jam cætera omnia oppido manifeſta ſunt. Patet enim ex progreſſionis natura, quòd numerus caſuum, qui cum ns ſterilibus experimentis nr fœcunda adducunt, ſit ipſe terminus maximus poteſtatis M, utpote quem ns termini præcedunt, & nr ſequuntur, per Lem. 3. item, quòd numeri illorum caſuum, quibus aut $nr+n$ aut $nr-n$ experimentis fœcundis cæteriſque ſterilibus eſſe contingit, exhibeantur per terminos poteſtatis L & Λ, quippe intervallo n terminorum à maximo M utrinque diſtantes; & per conſequens etiam, quòd ſumma caſuum, quibus non pluribus experimentis quàm $nr+n$, nec paucioribus quàm $nr-n$ fœcundis eſſe contingit, exprimatur per ſummam terminorum poteſtatis intra limites L & Λ comprehenſorum; ſumma reliquorum caſuum, quibus aut plura aut pauciora experimenta fœcunda redduntur, per cæterorum terminorum limites hos L & Λ excedentium ſummam expreſſa. Quare cùm tanta ſumi poſſit poteſtas binomii, ut ſumma terminorum utroque limite L & Λ incluſorum pluribus quàm c vicibus ſuperet ſummam cæterorum limites hos excedentium, per Lem. 4. & 5. ſequitur etiam, capi poſſe tot obſervationes, ut ſumma caſuum, quibus numero fertilium obſervationum ad numerum omnium rationem habere contingit, non excedentem limites $\frac{nr+n}{nt}$ & $\frac{nr-n}{nt}$,

$\frac{nr-n}{nt}$, ſeu $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$, pluribus quàm c vicibus ſuperet ſum̃am caſuum reliquorum; h. e. ut pluribus quàm c vicibus probabilius reddatur, rationem numeri obſervationum fertilium ad numerum omnium intra hos limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$, quàm extra caſuram eſſe. Quod demonſtrandum erat.

In ſpeciali autem horum applicatione ad numeros ſatis per ſe patet, quòd quo majores in eadem ratione aſſumuntur numeri r, s & t, eo arctius quoque conſtringi poſſunt limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$ rationis $\frac{r}{t}$. Idcirco si ratio inter numeros caſuum $\frac{r}{s}$, per experimenta determinanda, ſit ex. gr. ſeſquialtera, pro r & s non pono 3 & 2, ſed 30 & 20, vel 300 & 200 &c. ſufficiat poſuiſſe $r \propto 30$, $s \propto 20$, & $t \propto r+s \propto 50$, ut limites fiant $\frac{r+1}{t} \propto \frac{31}{50}$, & $\frac{r-1}{t} \propto \frac{29}{50}$; & ſtatuatur inſuper $c \propto 1000$: ſic fiet ex Scholii præſcripto, pro terminis ad

ſiniſtram:

$$m > \frac{Lc.\overline{s-1}}{L\overline{r+1}-Lr} \propto \frac{4.2787536}{142405} < 301$$

$$nt \propto mt + \frac{mst-st}{r+1} < 24728$$

dextram:

$$m > \frac{Lc.\overline{r-1}}{L\overline{s+1}-Ls} \propto \frac{4.4623980}{211893} < 211.$$

$$nt \propto mt + \frac{mrt-rt}{s+1} \propto 25550.$$

Unde per ibi demonſtrata infertur, quòd inſtitutis 25550 experimentis multo plus millies veriſimilius ſit, rationem quam numerus fertilium obſervationum obtinebit ad numerum omnium, intra hos limites $\frac{31}{50}$ & $\frac{29}{50}$ caſuram, quàm extra. Atque eodem pacto, poſita $c \propto 10000$, aut $c \propto 100000$ &c. cognoſcetur, idem plus decies millies probabilius fore, ſi fiant experimenta 31258; & plus quàm centies millies,

millies, ſi capiantur 36966, &c. & ſic porrò in infinitum, additis nempe continuo ad 25550 aliis 5708 experimentis. Unde tandem hoc ſingulare ſequi videtur, quòd si eventuum omnium obſervationes per totam æternitatem continuarentur, (probabilitate ultimo in perfectam certitudinem abeunte) omnia in mundo certis rationibus & conſtanti viciſſitudinis lege contingere deprehenderentur; adeo ut etiam in maximè caſualibus atque fortuitis quandam quaſi neceſſitatem, &, ut ſic dicam, fatalitatem agnoſcere teneamur; quam neſcio annon ipſe jam Plato intendere voluerit, ſuo de univerſali rerum apocataſtaſi dogmate, ſecundum quod omnia poſt innumerabilium ſeculorum decurſum in priſtinum reverſura ſtatum prædixit.

TRACTATUS
DE
SERIEBUS INFINITIS
Earumque
Summa Finita,
ET
Uſu in Quadraturis Spatiorum
& Rectificationibus Curvarum.

PRAEFATIO.

Cum non ita pridem in Serierum Infinitarum ſpeculationem incidiſſem, prima, cujus ſumma poſt Geometricam Progreſſionem ab aliis jam tractatam mihi ſeſe offerebat, erat ſeries fractionum, quarum denominatores Geometrica, numeratores Arithmetica progreſſione creſcunt: quod cum Fratri indicaſſem, non tantum mox idem adinvenit ille, ſed & præterea novæ cujusdam fractionum ſeriei, cujus denominatores Trigonalium, ut vocantur, numerorum dupli erant, ſummam perveſtigavit; quam vero & ipſe, cum ſignificaſſet, poſtridie detexi, propoſitis ei viciſſim aliis nonnullis, quæ interea, ut clavus clavum trudere ſolet, occaſione hac repereram. Quibus inventis certatim alter alterum ſic exercuimus, ut paucorum dierum ſpatio non tantum ſerierum illarum, quas Celeb. Leibnitius in Actis Erud. Lipſ. Anno 1682. M. Febr. & 1683. M. Octob. recenſet, nosque paulo antea mirati fuimus, ſummas dare poſſemus, ſed & plura alia eaque non contemnenda ex gemino duntaxat fundamento invenerimus, quorum unum conſiſtit in reſolutione ſeriei in alias infinitas ſeries, alterum in ſubductione ſeriei uno alterove termino mutilatæ à ſeipſa integra. Horum vero præcipua (cum eorum nihil apud hos quos legi hactenus, publicatum viderim) enucleanda

anda proponam, præmiſſis nonnullis, quæ paſſim apud alios quoque vulgatæ proſtant, Propoſitionibus, ne illas aliunde petere opus eſſet. Cæterum quantæ ſit neceſſitatis pariter & utilitatis hæc ſerierum contemplatio, ei ſane ignotum eſſe non poterit, qui perſpectum habuerit, ejusmodi ſeries ſacram quaſi eſſe anchoram, ad quam in maxime arduis & deſperatæ ſolutionis Problematibus, ubi omnes alias humani ingenii vires naufragium paſſæ, velut ultimi remedii loco confugiendum eſt.

Axiomata ſeu Poſtulata.

1. OMne quantum eſt diviſibile in partes ſe minores.

2. Omni quantitate finita poteſt accipi major.

3. Si quantitas quæpiam multata parte ſui aliqua ſubtrahitur à ſeipſa integra, relinquitur illa pars.

PROPOSITIONES:

I. *QUod data quavis quantitate minus eſt, illud eſt non-quantum ſeu nihil.*

Dem. Nam ſi quantum eſſet, dividi poſſet in partes ſe minores, per Axiom. 1. non igitur eſſet data quavis quantitate minus, contra hyp.

II. *Quod data quavis quantitate majus eſt, infinitum eſt.*

Nam ſi finitum eſſet, illo poſſet accipi quantitas major, per Ax. 2. non igitur quavis data quantitate foret majus, contra hyp.

III. *Omnis Progreſſio Geometrica continuari poteſt per terminos infinitos.*

Semper enim fieri poteſt: Ut primus terminus ad ſecundum, ſic poſtremus ad ſequentem, & ſequens ad alium & alium ſine fine in infinitum; quorum quidem terminorum nullus æquari poteſt vel nihilo vel infinito, cum ſecus ad illum præcedens eam rationem habere non poſſet, quam habet primus ad ſecundum, contr. defin. progr.

IV. *Si ſit Progreſſio Geometrica quæcunque* A, B, C, D, E; *& alia Arithmetica totidem terminorum* A, B, F, G, H, *incipiens ab iisdem terminis* A

 & B,

& B, erunt reliquorum ſinguli in Geometrica ſingulis ordine ſibi reſpondentibus in Arithmetica majores, tertius tertio, quartus quarto, ultimus ultimo, adeoque omnes omnibus.

Quia enim $A.B::B.C::C.D::D.E.$ erit per 25. 5. Eucl. tum $A+C > 2B$ ꝏ (ex nat. Progr. Arith.) $A+F$; unde $C > F$: tum $A+D > B+C > B+F$ ꝏ $A+G$; unde $D > G$: tum $A+E > B+D > B+G$ ꝏ $A+H$; unde $E > H$. Quæ erant demonſtr.

V. *In progreſſione Geometrica creſcente* A, B, C, D, E *perveniri tandem poteſt ad terminum* E *quovis dato* Z *majorem.*

Incipiat ab iiſdem terminis Progreſſio Arithm. A, B, F, G, H, continuata quouſque ultimus H ſuperet Z (id enim fieri poſſe claret,) tum vero continuetur Geometrica per terminos totidem, eritque per præced. poſtremus $E > H > Z$. Q. E. D.

Coroll. Hinc in Progr. Geom. creſcente infinitorum terminorum poſtremus terminus eſt ∞, per Prop. II. (∞ eſt Nota Infiniti.)

VI. *In Progreſſ. Geometr. decreſcente* A, B, C, D, E *pervenitur tandem ad terminum* E *quovis dato* Z *minorem.*

Conſtituatur Progreſſio aſcendens Z, Y, X, V, T, in ratione B ad A, quouſque ultimus terminus Y ſuperet A, (quod fieri poſſe per præced. conſtat;) tum continuetur altera deſcendendo per totidem terminos A, B, C, D, E; eritque ultimus $E <$ dato Z. Quia enim Progreſſiones A, B, C, D, E, & T, V, X, Y, Z, per eandem rationem A ad B progrediuntur, & terminos numero æquales habent, erit ex æquo $A.E::T.Z.$ ſed $A < Y$, per conſtr. Ergo & $E < Z$. Q. E. D.

Coroll. Hinc in Progr. Geomet. decreſcente in infinitum continuata ultimus terminus eſt o, per Prop. I.

VII. *In omni Progr. Geom.* A, B, C, D, E, *primus terminus eſt ad ſecundum, ſicut ſumma omnium excepto ultimo ad ſummam omnium excepto primo.* (A. B:: A+B+C+D. B+C+D+E.)

Quia enim $A.B::B.C::C.D::D.E.$ erit per 12. 5. Eucl. $A.B::A+B+C+D.\ B+C+D+E.$ Q. E. D.

VIII. *Progreſſionis Geom. cujuscunque* A, B, C, D, E, *ſummam* S *invenire.*

Per præc. eſt $A.B::S-E.S-A$; quare convertendo $A.A \div B::S-E.A \div E$; unde $S-E$ ꝏ $\frac{A \text{ in } A \div E}{A \div B}$, & S ꝏ $\frac{A \text{ in } A \div E}{A \div B} + E$. ($\div$ denotat differen-

differentiam duarum quantitatum, quibus interſeritur, cum non definitur, penes utram ſit exceſſus.)

Coroll. Si Progreſſio Geometr. deſcendendo continuetur in infinitum, adeoque ultimus terminus per Coroll. VI. evaneſcat, erit ſumma omnium $\frac{Aq}{A-B}$: unde liquet, quo pacto infiniti etiam termini finitam ſummam conſtituere poſſunt.

IX. *Si Series infinita continuè proportionalium* A, B, C, D, E, *&c. decreſcat in ratione* A *ad* B, *erunt ſummæ omnium terminorum, omnium demto primo, omnium demtis duobus primis, &c. etiam continuè proportionales, & quidem in eadem ratione* A *ad* B.

Quoniam $A.B :: B.C :: C.D$, erit tum $Aq.Bq :: Bq.Cq$: tum etiam $A.B :: A-B.B-C :: B-C.C-D$, quare dividendo rationes æquales per æquales, $\frac{Aq}{A-B}.\frac{Bq}{B-C} :: \frac{Bq}{B-C}.\frac{Cq}{C-D}$, hoc eſt per Cor. præced. Summa omnium ad omnes ſequentes primum, ut hi ad omnes ſequentes ſecundum. Q. E. D. Et proinde per 19. 5. Eucl. ſumma omnium ad omnes ſequentes primum, ut primus ad ſecundum. Q. E. D.

X. *Seriei infinitæ fractionum*, $\frac{a}{b}$, $\frac{a+c}{b+d}$, $\frac{a+2c}{b+2d}$, $\frac{a+3c}{b+3d}$, *&c. quarum numeratores & denominatores creſcunt Progreſſione Arithmet. ultimus terminus eſt fractio* $\frac{c}{d}$, *cujus numerator & denominator ſunt communes progreſſionum differentiæ.*

Ad hoc analyticè inveſtigandum conſideretur quæſitus terminus ut cognitus, & vocetur t; numerus vero termini ut quæſitus, & dicatur n; eritque ex generatione progreſſionis terminus optatus $t \propto \frac{a+nc-c}{b+nd-d}$, ideoque $n \propto 1+\frac{bt-a}{c-dt}$, quod æquari debet infinito: & quia numerator hujus fractionis eſt finitus (nam infinitus eſſe non poteſt, aliàs t deberet eſſe $\propto \infty$, ideoque eſſet $c-d$, ipſaque adeo fractio negativa quantitas, quod abſurdum,) oportet ut denominator ſit æqualis nihilo, ac proinde $c \propto dt$, & $t \propto \frac{c}{d}$. Q. E. D.

Brevius ita: Ex ſeriei geneſi patet, terminum infiniteſimum eſſe $\frac{a+\infty c}{b+\infty d} \propto \frac{\infty c}{\infty d} \propto \frac{c}{d}$. Q. E. D.

Coroll. Summa omnium terminorum, ſive ultimus primo major

ſit minorve, neceſſario infinita eſt; infiniti enim termini minori horum duorum æquales infinitam dant ſummam: Unde à fortiori, &c.

XI. *Fractionis ad aliam ratio compoſita eſt ex ratione directa numeratorum & reciproca denominatorum.*

Nam $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{AD}{BD} . \frac{BC}{BD} :: AD . BC :: A.C + D.B.$ Q. E. D.

XII. *In ſerie fractionum, quarum numeratores creſcunt Progreſſione Arith. denominatores Geometrica, aut vice verſa, ut* $\frac{A}{F} . \frac{A+C}{G} . \frac{A+2C}{H} . \frac{A+3C}{I}$, aut $\frac{F}{A} . \frac{G}{A+C} . \frac{H}{A+2C} . \frac{I}{A+3C}$: *Si* N *nomen-ordinis ultimi termini ad unitatem majorem rationem habeat, quam* G *ad* G − F, *erit ille terminus ibi ſequenti major, hîc minor.*

1. *Hyp.* Quia $N. 1. > G. G-F$, erit convertendo $N. N-1 < G. F$, & $CN. CN-C < G.F$. Ergo $CN-C$: *in* $G > CN$ *in* F, ergo fortius (ob $AG > AF$) $A+NC-C$: *in* $G > A+CN$: *in* F, hoc eſt, Numerator termini N in $G >$ Numeratore termini ſequentis in F: Sed ita ſe habet terminus N ad terminum ſequentem, per præced. Quare terminus N major ſequenti, & ita deinceps ab illo omnes. Q. E. D.

2. *Hyp.* Inverſis invertendis eodem modo demonſtratur.

XIII. *Si infinitæ ſint fractiones* $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} . \frac{E}{F} . \frac{G}{H} . \frac{I}{L} . \frac{M}{N} . \frac{O}{P}$. *&c. quarum numeratores creſcant progr. Arithm. & denominatores Geom. erit ultimus terminus* 0; *ſin illi creſcant Geometr. hi Arithm. erit ultimus* ∞.

1. *Hyp.* Si primus terminus ſecundo non ſit major, continuari ſaltem poterit Progreſſio, quouſque præcedens ſuperet ſequentem, per præced. Eſto $\frac{G}{H} > \frac{I}{L}$, & ſint infiniti continuè proportionales G, I, Q, R, &c. unde propter $H, L, N, P \div$ erunt & ipſæ fractiones $\frac{G}{H} . \frac{I}{L} . \frac{Q}{N} . \frac{R}{P}$ &c. $\dot{\div}$ quæ ob $\frac{G}{H} > \frac{I}{L}$. in nihilum tandem abeunt per Cor. VI. Quare cum $Q > M$, $R > O$, &c. per IV. multo magis $\frac{G}{H} . \frac{I}{L} . \frac{M}{N} . \frac{O}{P}$, &c. in nihilum abibunt. Q. E. D.

2. *Hyp.* Niſi primus ſecundo minor ſit, continuetur progreſſio, quouſque præcedens ſequenti minor fiat, per præced. Eſto $\frac{G}{H} < \frac{I}{L}$, & ſint

& ſint infiniti H, L, S, T, &c. $\div\div$ unde propter G, I, M, O, &c. $\div\div$, & ipſæ fractiones $\frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{M}{S}, \frac{O}{T}$, &c. proportionales erunt, quæ ob $\frac{G}{H} < \frac{I}{L}$ in infinitum deſinunt per Cor. V. Quare cùm $S > N$, $T > P$, &c. per IV. multo magis $\frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{M}{N}, \frac{O}{P}$, &c. in infinitum excreſcent. Q. E. D.

XIV. *Invenire ſummam ſeriei infinitæ fractionum, quarum denominatores creſcunt progreſſione Geometrica quacunque, numeratores verò progrediuntur vel juxta numeros naturales* 1, 2, 3, 4, *&c. vel trigonales* 1, 3, 6, 10, *&c. vel pyramidales* 1, 4, 10, 20, *&c. aut juxta quadratos* 1, 4, 9, 16, *&c. aut cubos* 1, 8, 27, 64, *&c. eorumvè æquemultiplices.*

1. *Si Numeratores progrediuntur juxta numeros naturales:*

Summa invenitur, reſolvendo ſeriem propoſitam A in alias infinitas ſeries B, C, D, E, &c. quæ ſingulæ geometricè progrediuntur, quarumque ſummæ (ſi primam hîc excipias) novam Geometricam progreſſionem F conſtituunt per IX. cujus quidem, uti cæterarum, ſumma per Coroll. VIII. reperitur. En operationem:

$$A \infty \frac{a}{b} + \frac{a+c}{bd} + \frac{a+2c}{bdd} + \frac{a+3c}{bd3} \text{ \&c.} \infty B + C + D + E + \text{\&c.}$$

$$B \infty \frac{a}{b} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{bdd} + \frac{a}{bd3} \text{ \&c.} \infty \frac{ad}{bd-b}$$

$$C \infty \,.\, + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd3} \text{ \&c.} \infty \frac{c}{bd-b}$$

$$D \infty \ldots\ldots + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd3} \text{ \&c.} \infty \frac{c}{bdd-bd}$$

$$E \infty \ldots\ldots\ldots + \frac{c}{bd3} \text{ \&c.} \infty \frac{c}{bd3-bdd}$$

$$\text{\&c.} \infty \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ \&c.} \infty \text{ \&c.}$$

$F \infty \frac{cd}{b \text{ in } Q:d-1}$ cui additus primus terminus $\frac{ad}{bd-b}$ producit totius propoſitæ ſeriei A

$$\frac{ad}{b \text{ in } d-1} + \frac{cd}{b \text{ in } Q:d-1} \infty \text{ ſummam.}$$

2. *Si Numeratores ſunt juxta Trigonales:*

Series propoſita G reſolvenda eſt in aliam H, cujus numeratores ſint juxta præcedentem hypotheſin, hoc modo:

$$G \infty \frac{c}{b} + \frac{3c}{bd} + \frac{6c}{bdd} + \frac{10c}{bd^3} \text{ \&c.}$$

$$\frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \text{ \&c. } \infty \frac{cd}{bd-b}$$

$$+ \frac{2c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \frac{2c}{bd^3} \text{ \&c. } \infty \frac{2c}{bd-b}$$

$$+ \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} \text{ \&c. } \infty \frac{3c}{bdd-bd}$$

$$+ \frac{4c}{bd^3} \text{ \&c. } \infty \frac{4c}{bd^3-bdd}$$

$$\text{\&c. } \infty \text{ \&c.}$$

$H \infty \frac{cd^3}{b \text{ in } C:d-1}$ quandoquidem hæc ſeries ad præced. $\frac{c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3}$ &c. $\infty \frac{cd}{b \text{ in } Q:d-1}$ ſe habeat ut dd ad $d-1$.

3. *Si Numeratores ſunt juxta Pyramidales:*

Series reſolvitur in aliam, cujus numeratores progrediuntur juxta Trigonales, quæque ad præcedentem ſeriem ſe habet, ut d ad $d-1$; unde ſumma ejus invenitur $\infty \frac{cd^4}{b \text{ in } QQ:d-1}$. Generaliter, ſi propoſitæ ſeriei numeratores ſint juxta figuratos cujuslibet gradus, ejus ſumma ſe habebit ad ſummam ſimilis ſeriei gradus præcedentis, ut d ad $d-1$: unde reliquarum omnium ſummam invenire proclive admodum eſt.

4. *Si Numeratores ſunt juxta Quadratos:*

Series L reſolvitur in aliam M, cujus numeratores ſunt Arithmeticè progreſſionales, adeoque juxta primam hypotheſin:

$$L \infty \frac{c}{b} + \frac{4c}{bd} + \frac{9c}{bdd} + \frac{16c}{bd^3} \text{ \&c.}$$

$$\frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \text{ \&c. } \infty \frac{cd}{bd-b}$$

$$+ \frac{3c}{bd} + \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} \text{ \&c. } \infty \frac{3c}{bd-b}$$

$$+ \frac{5c}{bdd} + \frac{5c}{bd^3} \text{ \&c. } \infty \frac{5c}{bdd-bd}$$

$$+ \frac{7c}{bd^3} \text{ \&c. } \infty \frac{7c}{bd^3-bdd}$$

$$\text{\&c. } \infty \text{ \&c.}$$

$$M \infty \frac{cdd}{b \text{ in } Q:d-1} + \frac{2cd}{b \text{ in } C:d-1} \infty \frac{cd^3 + cdd}{b \text{ in } C:d-1}.$$

5. *Si Numeratores ſunt juxta Cubos:*

Series reſolvitur in aliam, cujus numeratores ſunt Trigonalium ſextupli unitate aucti; unde ejus ſumma juxta ſecundam hypotheſin

ſin invenitur $\frac{cdd}{b \text{ in } Q:d-1} + \frac{6cd3}{b \text{ in } QQ:d-1} \infty \frac{cd4 + 4cd3 + cdd}{b \text{ in } QQ:d-1}$. Exempli loco ſint ſeries ſequentes, Numeratorum

Naturalium	$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32}$ &c.	∞ 2
Trigonalium	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{6}{8} + \frac{10}{16} + \frac{15}{32}$ &c.	∞ 4
Pyramidalium	$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{10}{8} + \frac{20}{16} + \frac{35}{32}$ &c.	∞ 8
Quadratorum	$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32}$ &c.	∞ 6
Cuborum . .	$\frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \frac{64}{16} + \frac{125}{32}$ &c.	∞ 26

Coroll. Patet, in omnibus hujuſmodi ſeriebus poſtremos terminos in nihilum deſinere, & evaneſcere debere (quod ipſum jam præced. Propoſ. de earum una ex abundanti oſtendimus;) cùm alias illarum ſummæ finitæ eſſe non poſſent.

XV. *Invenire ſummam ſeriei infinitæ fractionum* R, *quarum numeratores conſtituunt ſeriem æqualium, denominatores vero Trigonalium, eorumve æque-multiplicium.*

Si à ſerie harmonicè proportionalium *N*, eademmet multata primo termino *P* ſubtrahatur, exoritur nova ſeries *Q*, cujus denominatores Trigonalium dupli ſunt, cujusque adeo ſumma æqualis erit ipſi primo termino ſeriei Harmonicæ *N*, per Ax. 3.

Operatio talis: A ſerie N $\infty \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c}$ &c.

ſubtracta ſeries P $\infty \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c}$ &c. $\infty\ N - \frac{a}{c}$

relinquit ſeriem Q $\infty \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c}$ &c. $\infty \frac{a}{c}$

cujus duplum R $\infty \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c}$ &c. $\infty \frac{2a}{c}$

ſeries ſcil. fractionum propoſita, quarum denominatores ſunt numeri Trigonales, eorumve æque-multiplices.

Obſervandum tamen, non ſine cautela hac utendum eſſe methodo: Nam ſi à ſequente ſerie *S* eadem demto primo termino *T* ſubtrahatur, prodibit ſeries *Q*, quæ antea; nec tamen inde ſequitur, ſummam ſeriei *Q*, æqualem eſſe primo termino ſeriei *S* $\infty \frac{2a}{c}$. Cujus rei ratio eſt, quòd, ſi à ſerie *S* ſubtrahitur ſeries ter-

minorum totidem T, in qua ſinguli termini poſtremum præcedentes ſingulos primum conſequentes in altera deſtruunt, reſiduum, hoc eſt reſultans ſeries Q, evidenter debet adæquari primo termino ſeriei S minus ultimo ipſius T; adeoque ipſi primo ſeriei S abſolutè æqualis eſſe nequit, niſi tum cùm ultimus ipſius T in nihilum deſinit, uti quidem deſinere perſpicuum eſt in ſerie P vel N; at non evaneſcit pariter in ſerie T vel S, verum eſt $\infty \frac{a}{c}$, per X. Quin itaque potius ſumma ſeriei $Q \infty \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} \infty \frac{a}{c}$, ut ſuprà.

$$S \infty \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} \text{ \&c.}$$
$$T \infty \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \frac{7a}{6c} \text{ \&c.}$$
$$Q \infty \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \text{ \&c.} \infty \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} \infty \frac{a}{c}.$$

XVI. *Summa ſeriei infinitæ harmonicè progreſſionalium*, $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ *&c. eſt infinita.*

Id primus deprehendit Frater: inventa namque per præced. ſumma ſeriei $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$, &c. viſurus porrò, quid emergeret ex iſta ſerie, $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30}$, &c. ſi reſolveretur methodo Prop. XIV. collegit propoſitionis veritatem ex abſurditate manifeſta, quæ ſequeretur, ſi ſumma ſeriei harmonicæ finita ſtatueretur. Animadvertit enim,

Seriem A, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$, &c. ∞ (fractionibus ſingulis in alias, quarum numeratores ſunt 1, 2, 3, 4, &c. transmutatis)

ſeriei B, $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30} + \frac{6}{42}$, &c. ∞ C + D + E + F, &c.

C. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$, &c. ∞ per præc. $\frac{1}{1}$
D.. $+ \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$, &c. ∞ C $- \frac{1}{2} \infty \frac{1}{2}$
E... $+ \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$, &c. ∞ D $- \frac{1}{6} \infty \frac{1}{3}$
F...... $+ \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$, &c. ∞ E $- \frac{1}{12} \infty \frac{1}{4}$
&c. ∞ &c.

} ∞ G; unde ſequitur, ſeriem $G \infty A$, totum parti, ſi ſumma finita eſſet.

Ego

Ego poſtmodum, cum indicaſſet, idem oſtenſivè hunc in modum: Summa ſeriei infinitæ harmonicæ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, &c. ſuperat datum quemvis numerum. Ergo infinita eſt, per II. Eſto datus numerus *N* quantumcunque magnus: Abſcinde à principio ſeriei aliquot terminos, quorum ſumma æquet vel ſuperet unam unitatem numeri *N*, & à ſerie reliqua iterum aliquos abſcinde, quorum ſumma aliam unitatem numeri *N* ſuperet, idque ſi fieri poſſit repete toties, quot in numero *N* ſunt unitates; ſic termini abſciſſi omnes ſuperabunt totum numerum, multo magis igitur tota ſeries eundem ſuperabit. Si neges, abſciſſis aliquot reliquos unitatem ſuperare poſſe, eſto primus reliquorum, qui poſt abſciſſionem ultimam remanſerunt, $\frac{1}{a}$, & ſequentes $\frac{1}{a+1}$, $\frac{1}{a+2}$, $\frac{1}{a+3}$, &c. Conſtituatur ad duos primos terminos $\frac{1}{a}$ & $\frac{1}{a+1}$ Progreſſio Geometrica, cujus ideo ſinguli poſt ſecundum termini ſingulis reſpondentibus in Progreſſione Harmonica minores ſunt ob denominatores majores, per IV. & continuetur hæc uſque ad $\frac{1}{aa}$ (quod quidem fiet in terminis numero finitis propter *a* numerum finitum) eritque hæc ſeries Geometrica finita ∞ 1, per VIII. Harmonica itaque terminorum totidem ſuperabit unitatem. Q. E. D.

Coroll. 1. *In propoſita ſerie initio ſumto à quolibet termino, erunt ab illo deinceps omnes, uſque ad illum, cujus locus deſignatur per quadratum numeri ordinis primi termini, ſimul ſumti unitate majores:* ſic termini à 2do ad 4tum uſque unitatem ſuperant, hinc à 5to ad 25tum, hinc à 26 ad 676 (*Q*: 26) hinc à 677 ad 458329 (*Q*: 677) &c. Nam in Geometrica progreſſione termini his limitibus intercepti unitatem æquant; ergo in Harmonica ſuperant, ubi & plures intercipiuntur & majores; majores quidem uti vidimus; plures, quia denominatores terminorum, cùm ſint minores quàm in Geometrica per IV. tardiùs illos limites aſſequuntur.

2. Patet, omnem aliam ſeriem harmonicam infinitam, ſummam quoque exhibere infinitam; ut ex. gr. ſi loco $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ &c. proponatur $\frac{1}{1000}+\frac{1}{2000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{4000}$ &c. ubi ſinguli termini ſin-

gulorum ſibi reſpondentium in altera, adeoque & omnes omnium, ſunt ſubmillecupli: nam infiniti pars milleſima & ipſa infinita eſt.

3. Summa ſeriei infinitæ, cujus poſtremus terminus evaneſcit, quandoque finita eſt, quandoque infinita.

4. Sequitur etiam, ſi modo in Geometriam ſaltum facere permiſſum eſt, ſpatium Curva Hyperbolica & Aſymptotis comprehenſum infinitum eſſe: Secta intelligatur Aſymptotos linea à centro *A* in partes æquales infinitas in punctis *B*, *C*, *D*, *E*, &c. è quibus ad curvam educantur rectæ totidem alteri Aſymptotôn parallelæ *BM*, *CN*, *DO*, *EP*, &c. & compleantur parallelogramma *AM*, *BN*, *CO*, *DP*, &c. quæ ob baſium æqualitatem inter ſe erunt, ut altitudines, ſeu ut rectæ *BM*, *CN*, *DO*, *EP*, &c. hoc eſt, ut $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. ex natura Hyperbolæ; cum igitur ſumma $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ &c. infinita oſtenſa ſit, erit & ſumma Parallelogrammorum *AM*, *BN*, *CO*, *DP*, &c. infinita, multoque magis ſpatium Hyperbolicum, quod Parallelogrammis illis circumſcriptum eſt.

XVII. *Invenire ſummam ſerierum Leibnitzianarum*, D. H. I: *aliarumque quarum denominatores ſunt numeri Quadrati aut Trigonales, minuti aliis Quadratis vel Trigonalibus.*

Cel. Leibnitius occaſione mirabilis ſuæ Quadraturæ Circuli in principio Actorum Lipſ. publicatæ, mentionem injicit ſummæ quarundam ſerierum infinitarum, quarum denominatores conſtituunt ſeriem quadratorum unitate minutorum, diſſimulato quo eam repererat artificio. En breviter totum myſterium:

A ſerie . . . . $A \infty \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c. ſubtrahatur ipſamet demtis duobus primis terminis, $B \infty \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ &c. $\infty A-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

relinquitur $C \infty \frac{2}{3}+\frac{2}{8}+\frac{2}{15}+\frac{2}{24}+\frac{2}{35}$ &c. $\infty A\text{-}B \infty \frac{1}{1}+\frac{1}{2} \infty \frac{3}{2}$

& propterea $D \infty \frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}$ &c. $\infty \frac{1}{2}C \infty \frac{3}{4}$

A ſerie . . . $E \infty \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$ &c. ſubtrahatur eadem demto primo termino, ... $F \infty \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}$ &c. $\infty E-1$

relin-

relinquitur $G \infty \frac{2}{3}+\frac{2}{15}+\frac{2}{35}+\frac{2}{63}+\frac{2}{99}$ &c. $\infty E-F \infty 1$

& propterea . . $H \infty \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ &c. $\infty \frac{1}{2} G \infty \frac{1}{2}$,

& proinde etiam $I \infty \frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}$ &c. $\infty D-H \infty \frac{3}{4}-\frac{1}{2} \infty \frac{1}{4}$.

Quod ipſum quoque ſic oſtenditur:

A ſerie . . . $L \infty \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$ &c. ſubtrahatur eadem demto primo termino, . . . $M \infty \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ &c. $\infty L-\frac{1}{2}$

relinquitur $N \infty \frac{2}{8}+\frac{2}{24}+\frac{2}{48}+\frac{2}{80}+\frac{2}{120}$ &c. $\infty L-M \infty \frac{1}{2}$

& proinde . . . $I \infty \frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{126}$ &c. $\infty \frac{1}{2} N \infty \frac{1}{4}$, ut anteà.

Memorabile autem prorſus eſt, quòd ſumma ſeriei D, $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}$ &c. (cujus denominatores ſunt numeri quadrati 4, 9, 16, 25, 36, &c. unitate minuti) invenitur. $\frac{3}{4}$, quin & excerptis per ſaltum alternis terminis, ſumma ſeriei H, $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}$ &c. $\infty \frac{1}{2}$; at ſi ex hâc iterum ſimplici ſaltu terminos loco pari poſitos excerpas, ut relinquatur $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ &c. ejus ſeriei infinitæ ſumma eſt vera magnitudo circuli nullo numero exprimibilis, ſumto vid. quadrato diametri $\infty \frac{1}{2}$.

Cæterum generaliter invenire poſſumus ſummam cujuslibet ſeriei, cujus numeratores conſtituunt ſeriem æqualium, & denominatores ſeriem quadratorum minutorum communi aliquo quadrato Q. aut etiam ſeriem Trigonalium minutorum communi aliquo numero Trigonali T: ſi obſervemus, ejusmodi ſeries naſci per ſubductionem ſeriei harmonicæ truncatæ ab initio tot terminis (quot indicat ibi duplum radicis quadratæ communis quadrati Q, hîc duplum unitate auctum radicis trigonalis numeri trigonalis T) à ſe-ipſa integra:

Ex.gr. ad inveniendam ſummam ſeriei D, $\frac{1}{7}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{40}+\frac{1}{55}$ &c.
cujus denominatores ſunt quadrati, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c.
minuti communi Quadrato Q. . . 9, 9, 9, 9, 9, 9.
(cujus Radix Q. 3, & duplum 6.) 7, 16, 27, 40, 55, 72, &c.

A ſerie . . . . $A \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ &c. ſubtrahatur
eadem multata ſex
primis terminis . . $B \infty \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}$ &c.

relinquitur . . . $C \infty \frac{6}{7} + \frac{6}{16} + \frac{6}{27} + \frac{6}{40} + \frac{6}{55} + \frac{6}{72}$ &c. $\infty A - B \infty$
$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \infty 2\frac{9}{20}$

adeoque . . . . $D \infty \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} + \frac{1}{72}$ &c. $\infty \frac{1}{6} C \infty \frac{49}{120}$.

Rurſus pro invenienda ſumma ſeriei E, $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39}$ &c.
cujus denominatores ſunt Trigonales 10, 15, 21, 28, 36, 45, &c.
minuti communi Trigonali T . . . . 6, 6, 6, 6, 6, 6, &c.
(cujus Radix Trigon. 3. & duplum 4, 9, 15, 22, 30, 39, &c.
unitate auctum 7)

A ſerie . . . $A \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ &c. ſubtrahatur eadem truncata ſeptem primis terminis

$F \infty \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14}$ &c.

relinquitur $G \infty \frac{7}{8} + \frac{7}{18} + \frac{7}{30} + \frac{7}{44} + \frac{7}{60} + \frac{7}{78} + \frac{7}{98}$ &c. $\infty A - F \infty$
$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \infty \frac{363}{140}$

adeoque . . $E \infty \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39} + \frac{1}{49}$ &c. $\infty \frac{2}{7} G \infty \frac{363}{490}$

Atque ita per hanc Propoſitionem inveniri poſſunt ſummæ ſerierum, cum denominatores ſunt vel numeri Trigonales minuti alio Trigonali, vel Quadrati minuti alio Quadrato; ut & per XV. quando ſunt puri Trigonales, ut in ſerie $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ &c. at, quod notatu dignum, quando ſunt puri Quadrati, ut in ſerie $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ &c. difficilior eſt, quàm quis expectaverit, ſummæ perveſtigatio, quam tamen finitam eſſe, ex altera, qua manifeſto minor eſt, colligimus: Si quis inveniat nobisque communicet, quod induſtriam noſtram eluſit hactenus, magnas de nobis gratias feret.

Hoc ſaltem monere adhuc liceat, quod ſpatium Hyperboloide Cubicali (cujus natura exprimitur per æquationem $xxy \infty aab$, hoc eſt, in qua Quadrata abſciſſarum ex Aſymptotis ſunt in applicatarum ratione

ratione reciproca,) & Aſymptotis ſuis comprehenſum, eodem modo ex finita hujus ſeriei ſumma finitum eſſe demonſtrari poſſit, quo ſimile ſpatium in ipſa Hyperbola ex infinita ſeriei Harmonicæ ſumma infinitum oſtenſum eſt.

XVIII. *Invenire ſummam ſeriei infinitæ reciprocæ numerorum Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyramidi-Pyramidalium, & figuratorum altioris cujusvis gradus in infinitum: atque infinitarum ſummarum ſummam.*

1. Quemadmodum ſi à ſerie fractionum harmonicè progreſſionalium, hoc eſt, ſerie reciproca numerorum naturalium A, eadem multata primo termino ſubtrahatur, naſcitur ſeries fractionum, quarum numeratores ſunt *unitates*, denominatores *trigonalium dupli*; ut patet ex demonſtr. XV. Ita ſi à ſerie reciproca trigonalium B, eadem truncata primo termino ſubducatur, exoritur ſeries fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros naturales 2. 3. 4. 5. &c. ſed quæ reducuntur ad fractiones, quarum omnium numeratores ſunt *binarii*, denominatores vero *pyramidalium tripli*; unde ipſa ſeries ad ſeriem reciprocam pyramidalium C, ut $\frac{2}{3}$ ad 1. Pariter ſi à ſerie hac reciproca pyramidalium, ipſamet mutilata primo termino ſubducatur, relinquitur ſeries fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros trigonales 3. 6. 10. 15. &c. ſed quæ reduci poſſunt ad alias, quarum numeratores omnes ſunt *ternarii*, denominatores vero *trianguli-pyramidalium quadrupli*, unde ipſa ſeries ad ſeriem reciprocam trianguli-pyramidalium D, ut $\frac{3}{4}$ ad 1: Et ſic deinceps in infinitum. Quocirca cum ſingulæ hæ per ſubductionem genitæ ſeries, quarum numeratores ſunt unitatum, denominatores figuratorum multipli, per Ax. 3. æquipolleant unitati, ipſæ figuratorum ſeries reciprocæ ordine dabunt ſummas, ut ſequitur:

A. Natur. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ &c. $\infty\ \frac{1}{0}\ \infty\ 1\frac{1}{0}$, per XVI.

B. Trigon. $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}$ &c. $\infty\ \frac{2}{1}\ \infty\ 1\frac{1}{1}$, per XV.

C. Pyramid. $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}$ &c. $\infty\ \frac{3}{2}\ \infty\ 1\frac{1}{2}$.

D. Triang. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}$ &c. $\infty\ \frac{4}{3}\ \infty\ 1\frac{1}{3}$.

E. Pyr. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}+\frac{1}{126}+\frac{1}{252}$ &c. $\infty\ \frac{5}{4}\ \infty\ 1\frac{1}{4}$.

2. Sum-

2. Summæ hæ à ſecunda ſerie ordine collectæ ſunt $1\frac{1}{1}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, &c. unde ſumma ſummarum eſt $1\frac{1}{1} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} +$ &c. quæ infinita eſt: quin & demtis ſingularum ſerierum primis terminis ſeu unitatibus, ſumma fit $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ &c. quæ itidem infinita exiſtit, per XVI. at demtis inſuper ſecundis terminis $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ &c. ſumma evadit finita & æqualis $1 + \frac{1}{2} \infty \frac{3}{2}$ per Axiom. 3.

XIX. *Invenire ſummam ſeriei finitæ reciprocæ Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyram. Pyramidalium, & figuratorum altioris cujusvis gradus in infinitum.*

Poſito in qualibet ſerie numero terminorum n, poſtremi termini in ſeriebus directis numerorum naturalium, trigon. pyramid. (per ea quæ demonſtrabuntur alibi) ſunt ordine hi, qui ſequuntur: (denotantibus hîc & ubique punctulis continuam multiplicationem quantitatum, quibus interſeruntur.)

$$n,\ \frac{n.n+1}{1.2},\ \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3},\ \frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.2.3.4},\ \&c.$$

& qui hos immediatè excipiunt, ſunt iſti:

$$n+1,\ \frac{n+1.n+2}{1.2},\ \frac{n+1.n+2.n+3}{1.2.3},\ \frac{n+1.n+2.n+3.n+4}{1.2.3.4}\ \&c.$$

ac propterea erunt ultimi termini in eorundem ſeriebus reciprocis iſti:

$$\frac{1}{n},\ \frac{1.2}{n.n+1},\ \frac{1.2.3}{n.n+1.n+2},\ \frac{1.2.3.4}{n.n+1.n+2.n+3},\ \&c.$$

& qui hos immediatè ſequuntur,

$$\frac{1}{n+1},\ \frac{1.2}{n+1.n+2},\ \frac{1.2.3}{n+1.n+2.n+3},\ \frac{1.2.3.4}{n+1.n+2.n+3.n+4},\ \&c.$$

Jam ſi à qualibet ſerie reciproca eadem ipſa truncata ab initio & aucta in fine uno termino methodo Prop. XV. ſubtrahatur, ſubducto ſigillatim ſecundo termino à primo, tertio à ſecundo, ſequente ultimum ab ultimo, naſcitur ſeries terminorum totidem, quæ per ea quæ in præced. Propoſ. dicta ſunt, ſeriei reciprocæ figuratorum gradus ſequentis aut ſubdupla eſt, aut ſubſeſquialtera, aut ſubſeſquitertia, &c. atque inſuper per obſervata Propoſ. XV. æqualis primo termino minus ſequente ultimum ejus ſeriei, per cujus ſubductionem nata fuit: unde ipſa ſumma ſeriei finitæ reciprocæ figuratorum quorumcunque obtinetur facile, ut ſequitur: B, Tri-

B. Trigon. $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ &c. uſque ad $\frac{1\cdot 2}{n\cdot\overline{n+1}} \infty \frac{2}{1}-\frac{2}{1}$ in $\frac{1}{n+1} \infty \frac{2}{1}-\frac{2}{n+1}$

C. Pyram. $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$ &c. -- $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{n\cdot\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}} \infty \frac{3}{2}-\frac{3}{2}$ in $\frac{1\cdot 2}{\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}} \infty \frac{3}{2}-\frac{1\cdot 3}{\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}}$

D. △. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$ &c. $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{n\cdot\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}\cdot\overline{n+3}} \infty \frac{4}{3}-\frac{4}{3}$ in $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}\cdot\overline{n+3}} \infty \frac{4}{3}-\frac{1\cdot 2\cdot 4}{\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}\cdot\overline{n+3}}$

E. Py. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}$ &c. $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{n\cdot\overline{n+1}\cdot --- \overline{n+4}} \infty \frac{5}{4}-\frac{5}{4}$ in $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{\overline{n+1}\cdot --- \overline{n+4}} \infty \frac{5}{4}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{\overline{n+1}\cdot --- \overline{n+4}}$

XX. *Invenire ſummam ſeriei infinitæ reciprocæ Trigonalium, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. multatæ terminis initialibus quotlibet: & infinitarum ſummarum ſummam.*

1. Summa ſeriei infinitæ integræ Trigonalium, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. eſt $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$, &c. per XVIII. ſi ex unaquaque ſerie ab initio abſcindantur n termini, ſumma abſciſſorum eſt $\frac{2}{1}-\frac{2}{n+1}$, $\frac{3}{2}-\frac{1\cdot 3}{\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}}$, $\frac{4}{3}-\frac{1\cdot 2\cdot 4}{\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}\cdot\overline{n+3}}$, $\frac{5}{4}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}\cdot\overline{n+3}\cdot\overline{n+4}}$, &c. per XIX. ſubtracta ergo hac à ſumma omnium, erit ſumma reliquorum $\frac{2}{n+1}$, $\frac{1\cdot 3}{\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}}$, $\frac{1\cdot 2\cdot 4}{\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}\cdot\overline{n+3}}$, $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}\cdot\overline{n+3}\cdot\overline{n+4}}$, &c.

2. Summa ſerierum omnium mutilatarum ſeu nullo ſeu uno termino eſt infinita, duobus terminis eſt $\frac{1}{2}$ per XVIII. Hinc ſi demas tertios terminos (qui conſtituunt ſeriem trigonalium B truncatam duobus terminis, cujus ſumma per eandem eſt $\frac{2}{3}$) erit reliquorum omnium ſumma $\frac{3}{2}-\frac{2}{3} \infty \frac{5}{6} \infty \frac{5}{2\cdot 3}$. Hinc denuo ſi quartos terminos auferas (qui formant ſeriem pyramidalium C itidem truncatam duobus terminis, ſummamque proin per præced. efficiunt $\frac{2}{8}$)

relinquetur cæterorum omnium ſumma $\frac{5}{6}-\frac{2}{8} \infty \frac{7}{12} \infty \frac{7}{3\cdot4}$. Hinc iterum ſi quintos terminos reſeces, exibit cæterorum ſumma $\frac{9}{4\cdot5}$; ſi ſextos, $\frac{11}{5\cdot6}$; ſeptimos, $\frac{13}{6\cdot7}$; &c. adeoque univerſaliter ſi ex unaquaque ſerie tollantur n termini, erit mutilatarum ita ſerierum omnium ſumma reliqua $\frac{2n-1}{n-1\cdot n}$.

Coroll. Series $\frac{2}{n+1}+\frac{1\cdot3}{n+1\cdot n+2}+\frac{1\cdot2\cdot4}{n+1\cdot n+2\cdot n+3}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot5}{n+1\cdot n+2\cdot n+3\cdot n+4}+$ &c. ſive, $\frac{2}{1}$ in $\frac{1}{n+1}+\frac{3}{2}$ in $\frac{1\cdot2}{n+1\cdot n+2}+\frac{4}{3}$ in $\frac{1\cdot2\cdot3}{n+1\cdot n+2\cdot n+3}+\frac{5}{4}$ in $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{n+1\cdot\text{——}\cdot n+4}+$ &c. $\infty \frac{2n-1}{n-1\cdot n}$: ſingula enim ſeriei hujus membra ſingulas figuratarum ſerierum mutilatarum ſummas exprimunt, per 1. part. hujus; adeoque & omnia omnium.

XXI. *Seriei hujus*, $\frac{1a}{1\cdot2}+\frac{2a}{1\cdot2\cdot3}+\frac{3a}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{4a}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+$ &c: *hoc eſt*, $\frac{a}{2}+\frac{a}{1\cdot3}+\frac{a}{1\cdot2\cdot4}+\frac{a}{1\cdot2\cdot3\cdot5}+$ &c: *ſummam invenire.*

Series hæc naſcitur ſubductione ſequentis ſeriei, $\frac{a}{1}+\frac{a}{1\cdot2}+\frac{a}{1\cdot2\cdot3}+\frac{a}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+$ &c: multatæ primo termino à ſeipſa integra, methodo Prop. XV. quare ejus ſumma $\infty\, a$, primo ſc. termino hujus, per Axioma 3.

Coroll. Hinc $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{4}{1\cdot2\cdot3}+\frac{9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+$&c. ($\infty$ F + G + H + I + &c.) $\infty \frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+$ &c.

Nam F. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+$ &c. $\infty \frac{1}{1}$ per XXI.

G. - - $+\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+$ &c. ∞ F $-\frac{1}{1\cdot2} \infty \frac{1}{1\cdot2}$

H. - - - - - $+\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+$ &c. ∞ G $-\frac{2}{1\cdot2\cdot3} \infty \frac{1}{1\cdot2\cdot3}$

I. - - - - - - - - - - $+\frac{4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+$ &c. ∞ H $-\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \infty \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$

XXII.

XXII. *Invenire ſummas ſerierum K, L, M, N, quarum numeratores ſunt Arithmeticè progreſſionales, denominatores Trigonalium integrorum aut Quadratorum unitate minutorum quadrata.*

$$K \infty \frac{3}{\Box 1} + \frac{5}{\Box 3} + \frac{7}{\Box 6} + \frac{9}{\Box 10} + \frac{11}{\Box 15} + \frac{13}{\Box 21} + \&c.$$

$$L \infty \frac{2}{\Box 3} + \frac{3}{\Box 8} + \frac{4}{\Box 15} + \frac{5}{\Box 24} + \frac{6}{\Box 35} + \frac{7}{\Box 48} + \&c.$$

$$M \infty \frac{1}{\Box 3} + \frac{2}{\Box 15} + \frac{3}{\Box 35} + \frac{4}{\Box 63} + \frac{5}{\Box 99} + \frac{6}{\Box 143} + \&c.$$

$$N \infty \frac{3}{\Box 8} + \frac{5}{\Box 24} + \frac{7}{\Box 48} + \frac{9}{\Box 80} + \frac{11}{\Box 120} + \frac{13}{\Box 168} + \&c.$$

Per ſubductionem ſeriei $\frac{1}{\Box 1} + \frac{1}{\Box 2} + \frac{1}{\Box 3} + \frac{1}{\Box 4} + \frac{1}{\Box 5} + \frac{1}{\Box 6} + \&c.$ mutilatæ primo termino à ſeipſa integra naſcitur ſeries aliqua, cujus termini ſunt ſubquadrupli terminorum reſpondentium ſeriei K; unde per Ax. 3. ſeries K ∞ 4 in $\frac{1}{\Box 1} \infty 4$.

Per ſubductionem vero ejusdem ſeriei mutilatæ duobus primis terminis à ſeipſa integra oritur ſeries, quæ quadrupla eſt ſeriei L; unde per id. Ax. ſeries L $\infty \frac{1}{4}$ *in*: $\frac{1}{\Box 1} + \frac{1}{\Box 2} \infty \frac{5}{16}$.

Denique per ſubductionem ſeriei $\frac{1}{\Box 1} + \frac{1}{\Box 3} + \frac{1}{\Box 5} + \frac{1}{\Box 7} + \frac{1}{\Box 9} +$ &c. multatæ primo termino à ſeipſa integra emergit alia, quæ octupla eſt ſeriei M, quare per 3. Ax. ſeries M $\infty \frac{1}{8}$ *in* $\frac{1}{\Box 1} \infty \frac{1}{8}$: & propterea duplum ſeriei M, hoc eſt, omnes termini locorum imparium ſeriei L $\infty \frac{1}{4}$; adeoque reliqui termini ejusdem ſeriei, hoc eſt, ipſa ſeries N $\infty \frac{5}{16} - \frac{1}{4} \infty \frac{1}{16}$.

XXIII. *Invenire ſummas ſerierum Q & R, item V & X, &c. quarum denominatores ſunt termini integri progreſſionis quadruplæ, noncuplæ, &c. numeratores vero termini progreſſionis duplæ, triplæ, &c. unitate tum minuti, tum aucti.*

Operatio talis:

$$\left.\begin{array}{l} O \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \&c. \infty 2 \\ P \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \&c. \infty \frac{4}{3} \end{array}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

$$Q \infty \frac{1-1\infty 0}{1}+\frac{2-1\infty 1}{4}+\frac{4-1\infty 3}{16}+\frac{8-1\infty 7}{64}+\frac{16-1\infty 15}{256}+\&c. \infty O-P \infty 2-\tfrac{4}{3}\infty\tfrac{2}{3}$$

$$R \infty \frac{1+1\infty 2}{1}+\frac{2+1\infty 3}{4}+\frac{4+1\infty 5}{16}+\frac{8+1\infty 9}{64}+\frac{16+1\infty 17}{256}+\&c. \infty O+P \infty 2+\tfrac{4}{3}\infty\tfrac{10}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} S \infty \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\&c. \infty \frac{3}{2} \\ T \infty \frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\frac{1}{6561}+\&c. \infty \frac{9}{8} \end{array}\right\} \text{per Corol. VIII.}$$

$$V \infty \frac{1-1\infty 0}{1}+\frac{3-1\infty 2}{9}+\frac{9-1\infty 8}{81}+\frac{27-1\infty 26}{729}+\frac{81-1\infty 80}{6561}+\&c. \infty S-T \infty \tfrac{3}{2}-\tfrac{9}{8}\infty\tfrac{3}{8}$$

$$X \infty \frac{1+1\infty 2}{1}+\frac{3+1\infty 4}{9}+\frac{9+1\infty 10}{81}+\frac{27+1\infty 28}{729}+\frac{81+1\infty 82}{6561}+\&c. \infty S+T \infty \tfrac{3}{2}+\tfrac{9}{8}\infty\tfrac{21}{8}$$

Idem inveniri poteſt, reſolvendo ſeries propoſitas Q, R; V & X methodo Prop. XIV. Exempli loco eſto ſeries

$$Q \infty \tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{16}+\tfrac{7}{64}+\tfrac{15}{256}+\&c. \infty Y+Z+\Pi+\Sigma+\&c.$$

$$\left.\begin{array}{l} Y \infty \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\&c. \infty \text{ per Coroll. VIII. } \frac{1}{3} \\ Z \infty \text{- -} +\frac{2}{16}+\frac{2}{64}+\frac{2}{256}+\&c. \infty 2Y-\frac{2}{4}\infty\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\infty\frac{1}{6} \\ \Pi \infty \text{- - -} +\frac{4}{64}+\frac{4}{256}+\&c. \infty 2Z-\frac{4}{16}\infty\frac{2}{6}-\frac{4}{16}\infty\frac{1}{12} \\ \Sigma \infty \text{- - - - -} +\frac{8}{256}+\&c. \infty 2\Pi-\frac{8}{64}\infty\frac{2}{12}-\frac{8}{64}\infty\frac{1}{24} \\ \&c. \infty \text{- - - - - - - - - -} \&c. \text{- - - - - - - -} \infty \&c. \end{array}\right\} \tfrac{2}{3} \text{ per Coroll. VIII.}$$

XXIV. *In ſerie quavis infinita, cujus numeratores omnes ſunt æquales, denominatores vel numeri naturales, vel eorundem quadrata, cubi, aut alia quæcunque poteſtas, ſumma terminorum omnium in locis imparibus eſt ad ſummam omnium in paribus, ut ſimilis poteſtas binarii unitate multata ad unitatem.*

Putà in numeris naturalibus, ut 1 ad 1; in quadratis ut 3 ad 1; in cubis ut 7 ad 1; in biquadratis ut 15 ad 1; &c.

Modus inveſtigandi talis:

In Numeris Naturalibus:

Series iſta $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+$ &c. æquatur ſuis partibus, videl. ſeriebus A + B + C + D + &c.

$$\left.\begin{array}{l} A \infty \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\&c. \infty \frac{2}{1} \\ B \infty \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\&c. \infty \frac{2}{3} \\ C \infty \frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\&c. \infty \frac{2}{5} \\ D \infty \frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}+\&c. \infty \frac{2}{7} \end{array}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

Eſt ergo $\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+$ &c. æqualis, ideoque $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+$ &c. dimidia ſeriei propoſitæ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$

$\frac{1}{4}+$ &c. hoc eſt, ſumma terminorum in locis imparibus dimidia ſeriei totius, & proinde æqualis ſummæ reliquorum $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+$ &c.

Patet hinc rurſum veritas Prop. XVI. cum enim $\frac{1}{1}>\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}>\frac{1}{6}$, &c. erit $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+$ &c. $>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+$ &c. cui tamen æqualis modo oſtenſa eſt; quæ utique conciliari nequeunt, niſi ſumma utriusque ſeriei ſtatuatur infinita, hoc eſt, tanta ut quæ inter illas intercedit differentia, rationem æqualitatis deſtruere non poſſit.

In Numeris Quadratis:

Series $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+$ &c. $\infty\ E+F+G+H+$ &c.

$$\left.\begin{array}{l} E \infty \frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\&c. \infty \frac{4}{3.1} \\ F \infty \frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{144}+\frac{1}{576}+\&c. \infty \frac{4}{3.9} \\ G \infty \frac{1}{25}+\frac{1}{100}+\frac{1}{400}+\frac{1}{1600}+\&c. \infty \frac{4}{3.25} \\ H \infty \frac{1}{49}+\frac{1}{196}+\frac{1}{784}+\frac{1}{3136}+\&c. \infty \frac{4}{3.49} \end{array}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

Eſt ergo $\frac{4}{3.1}+\frac{4}{3.9}+\frac{4}{3.25}+\frac{4}{3.49}+$ &c. $\infty\ \frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ &c. adeoque prioris ſubſeſquitertia, hoc eſt, $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+$ &c. æqualis $\frac{3}{4}$ poſterioris, hoc eſt, termini omnes locorum imparium in ſerie propoſita conſtituunt tres quartas partes totius ſeriei, & reliqui unam: quare ſumma terminorum illorum ad ſummam horum, ut 3 ad 1.

Eadem inveſtigandi methodus obſervetur in reliquis poteſtatibus.

Aliter & univerſaliter ita:

$$x \infty \frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{6^m}\ \&c.$$

$$y \infty \frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}\ \&c.$$

$$x-y \infty +\frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{2^m 1^m}\right)+\frac{1}{4^m}\left(\frac{1}{2^m 2^m}\right)+\frac{1}{6^m}\left(\frac{1}{2^m 3^m}\right)\&c.$$

$$2^m x-2^m y \infty +\frac{1}{1^m} \quad +\frac{1}{2^m} \quad +\frac{1}{3^m}\&c. \infty x$$

unde $2^m x - x \infty 2^m y$; & $y \infty x - \frac{x}{2^m}$, & $x - y \infty \frac{x}{2^m}$, ergo y.

$x - y :: x - \frac{x}{2^m} . \frac{x}{2^m} :: 1 - \frac{1}{2^m} . \frac{1}{2^m} :: 2^m - 1 . 1$.

Schol. Liquet hinc, quod ſummæ duarum ſerierum (etiamſi incognitæ) poſſint ad ſe invicem habere rationem cognitam. vid. Prop. XVII. ſub fin. Extendit ſe autem demonſtratio ad poteſtatum radices ſive ad poteſtates fractas non minus ac integras: ſic ex. gr. colligimus, in ſerie $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{27}}+\frac{1}{\sqrt{64}}+\frac{1}{\sqrt{125}}+$ &c. (ubi denominatores ſunt cuborum radices quadratæ) omnes terminos locorum imparium ad omnes parium eſſe, ut $\sqrt{8}-1$ ad 1. Mirabile verò eſt, quod in ſerie $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+$ &c. (cujus ſumma infinita eſt, ceu major ſerie $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ &c. ob denominatores minores) termini locorum imparium ad terminos parium juxta regulam inveniuntur habere rationem $\sqrt{2}-1$ ad 1. minoris ſc. ad majus, cùm tamen illi cum his ſigillatim collati iisdem manifeſto ſint majores: cujus ἐναντιοφανείας rationem, etſi ex infiniti natura finito intellectui comprehendi non poſſe videatur, nos tamen ſatis perſpectam habemus. Idem vero de ſimilibus ſeriebus aliis, quæ infinitam ſummam habent, intelligendum.

XXV. *Series Theſis X,* $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}+\frac{a+2c}{b+2d}-\frac{a+3c}{b+3d}$; *& alia Harmonica terminorum totidem & denominatorum eorundem,* $\frac{f}{b}-\frac{f}{b+d}+\frac{f}{b+2d}-\frac{f}{b+3d}$; *ſignis + & — alternatim ſe excipientibus, ſumtoque* $f \infty a - \frac{bc}{d}$, *æquales ſummas habent.*

Etenim

Etenim ſubtrahendo terminos locorum parium à terminis imparium, provenit eadem utrobique ſeries, $\frac{ad-bc}{bb+bd}+\frac{ad-bc}{bb+5bd+6dd}$, ſive $\frac{df}{bb+bd}+\frac{df}{bb+5bd+6dd}$, &c.

Eſto ex.gr. ſeries th.X. $\frac{3}{1}-\frac{5}{2}+\frac{7}{3}-\frac{9}{4}+\frac{11}{5}-\frac{13}{6}$, poſitoq; $f \infty 3-2 \infty 1$, ſeries harmonica, $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$, erit ſumma utriusque $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}$, per ſaltum excerpta ex ſerie Q. th. XV.

XXVI. *Seriei infinitæ fractionum K (quarum denominatores creſcunt progreſſione Geometrica, hoc eſt, ſequentes præcedentium ſunt æque-multiplices exactè, numeratores verò præcedentium æque-multiplices aucti vel minuti communi quodam numero, ſummam ultimumve terminum reperire.*

($\pm$ denotat vel ubique + vel ubique —)

$$K \infty \frac{a}{c}+\frac{ab \pm d}{cm}+\frac{abb \pm bd \pm d}{cmm}+\frac{ab^3 \pm bbd \pm bd \pm d}{cm^3}+\frac{ab^4 \pm b^3d \pm bbd \pm bd \pm d}{cm^4}+\&c.$$

1. Summa ſeriei invenitur, reſolvendo illam methodo Prop. XIV. in ſeries fractionum purè proportionalium L+M+N+O+P+&c.

$$\left.\begin{array}{llllllll}
L \infty & \frac{a}{c}+\frac{ab}{cm} & +\frac{abb}{cmm} & +\frac{ab^3}{cm^3} & +\frac{ab^4}{cm^4} & +\&c. & \infty + \frac{am}{m-b : \text{in } c} \\
M \infty & \pm \frac{d}{cm} & \pm \frac{bd}{cmm} & \pm \frac{bbd}{cm^3} & \pm \frac{b^3d}{cm^4} & \pm \&c. & \infty \pm \frac{d}{m-b : \text{in } c} \\
N \infty & & \pm \frac{d}{cmm} & \pm \frac{bd}{cm^3} & \pm \frac{bbd}{cm^4} & \pm \&c. & \infty \pm \frac{d}{m-b : \text{in } mc} \\
O \infty & & & \pm \frac{d}{cm^3} & \pm \frac{bd}{cm^4} & \pm \&c. & \infty \pm \frac{d}{m-b : \text{in } mmc} \\
P \infty & & & & \pm \frac{d}{cm^4} & \pm \&c. & \infty \pm \frac{d}{m-b : \text{in } m^3c} \\
\&c. \infty & & & & & \pm \&c. & \infty \pm \&c.
\end{array}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

Summæ ſerierum M, N, O, P, &c. novam progreſſionem Geometricam conſtituunt, cujus ſumma per Coroll. VIII. eſt $\frac{md}{m-1 : \text{in } m-b : \text{in } c}$, quæ ſummæ ſeriei L, $\frac{am}{m-b : \text{in } c}$ addita vel ſubtracta efficit $\frac{amm-am \pm md}{m-1 : m-b : \text{in } c}$ ſummam omnium ſerierum L, M, N, &c. hoc eſt, ipſius ſeriei propoſitæ K.

2. Obſer-

2. Obſervandum, ſi $m > b$, ſummam eſſe finitam, adeoque ultimum ſeriei terminum evaneſcere, vid. Cor. XIV.

Sin $m < b$, & ſumma infinita eſt, & ultimus quoque terminus eſt infinitus; tum enim ſingulæ progreſſiones Geometricæ L, M, N, &c. ſunt creſcentes: confer Prop. V.

At exiſtente $m \propto b$, ſumma quidem infinita eſt, ſed poſtremus terminus finitus: tum enim ſurrogato m in locum b, ſecundus terminus fit $\frac{am \pm d}{cm}$, hoc eſt, $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm}$: tertius $\frac{amm \pm md \pm d}{cmm}$, hoc eſt, $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{d}{cmm}$: quartus $\frac{am3 \pm mmd \pm md \pm d}{cm3}$, hoc eſt, $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{d}{cmm} \pm \frac{d}{cm3}$: atque ita poſtremus $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{d}{cmm} \pm \frac{d}{cm3} \pm \frac{d}{cm4} \pm$ &c. in infinitum: unde patet, terminum infiniteſimum reſolvi in $\frac{a}{c} \pm$ ſerie infinitorum Geometricè progreſſionalium in ratione m ad 1, quorum ſumma per Cor. VIII. eſt $\frac{d}{m - 1 : \text{in}\, c}$, quæ ipſi $\frac{a}{c}$ addita vel ſubtracta efficit terminum infiniteſimum $\frac{am - a \pm d}{m - 1 : \text{in}\, c}$, cujus numerator differentiam numeratorum primi & ſecundi termini, uti & denominator denominatorum eorundem differentiam exprimit: quare cùm ex Prop. X. manifeſtum ſit, terminum ultimum hujus progreſſionis

$$Q \propto \frac{a}{c},\ \frac{am \pm d}{cm},\ \frac{2am - a \pm 2d}{2cm - c},\ \frac{3am - 2a \pm 3d}{3cm - 2c},\ \frac{4am - 3a \pm 4d}{4cm - 3c},\ \&c.$$

$$\text{ſive}\ \frac{a}{c},\ \frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm},\ \frac{a}{c} \pm \frac{2d}{2cm - c},\ \frac{a}{c} \pm \frac{3d}{3mc - 2c},\ \frac{a}{c} \pm \frac{4d}{4cm - 3c},\ \&c.$$

itidem eſſe $\frac{am - a \pm d}{m - 1 : \text{in}\, c}$ ſive $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{m - 1 : \text{in}\, c}$; ſequitur in utraque progreſſione K & Q, primis duobus terminis exiſtentibus iiſdem ultimos quoque eſſe pares, quamvis incrementa vel decrementa prioris magis ſubitanea ſint, quandoquidem ejus termini non niſi per ſaltum ex poſteriore ſunt excerpti: Invenio enim, quod memorabile eſt, tertium terminum ſeriei K convenire cum termino, $m + 2$, quartum cum $mm + m + 2$, quintum cum $m3 + mm + m + 2$, ſextum cum $m4 + m3 + mm + m + 2$ ſeriei Q, & ſic deinceps; uti patere poterit ex ſubjunctis ſeriebus, ubi a valet 2, c 3, b vel m 3, & d 1.

K $\propto$

$K \infty \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{22}{27}, \frac{67}{81}, \frac{202}{243}$, &c. ultimus $\frac{5}{6}$.

$Q \infty \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{12}{15}, \frac{17}{21}, \frac{22}{27}, \frac{27}{33}, \frac{32}{39}, \frac{37}{45}, \frac{42}{51}, \frac{47}{57}, \frac{52}{63}, \frac{57}{69}, \frac{62}{75}, \frac{67}{81}$, &c. ultimus $\frac{5}{6}$.

Intellige vero, quæ dicta ſunt de ſumma ultimoque termino ſeriei K, ſi numeratores præcedentium ſunt æque-multiplices aucti communi numero d; vel diminuti quidem eodem numero, at inſuper $ab > a + d$. Nam ſi ſit $ab \infty a + d$, æquivalebunt ſinguli numeratores ipſi a, ſummaque ſeriei fiet finita, nempe $\frac{am}{m-1 : in\, c}$, & ultimus terminus evaneſcet, ſive m exiſtat $<$ vel ∞ ipſi b.

XXVII. *Si dati cujuslibet numeri radix quadrata ducatur in ipſum numerum, & producti radix quadrata denuo ducatur in eundem, & producti hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: erit radix producti ultimi æqualis ipſi dato numero:* (putà, ſi datus numerus vocetur a, erit $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}}$ &c. $\infty\, a$.)

Ponatur enim $x \infty \sqrt{:a\sqrt{:a\sqrt{:a\sqrt{:a}}}}$ &c. erit $xx \infty a\sqrt{:a\sqrt{:a\sqrt{:a}}}$ &c. & $\frac{xx}{a} \infty \sqrt{:a\sqrt{:\sqrt{:a}}}$ &c. $\infty\, x$: proinde $xx \infty ax$, & $x \infty a$. Q. E. D.

XXVIII. *Si dati numeri cujuslibet radix quadrata addatur ipſi dato numero, & aggregati radix quadrata denuo addatur eidem, & aggregati hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: radix aggregati ultimi radicem dati numeri quarta parte unitatis aucti dimidia unitate ſuperabit.* (putà $\sqrt{:a + \sqrt{:a + \sqrt{:a + \sqrt{:a +}}}}$ &c. $\infty \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.)

Poſito enim $x \infty \sqrt{:a + \sqrt{:a + \sqrt{:a +}}}$ &c. erit $xx \infty a + \sqrt{:a + \sqrt{:a +}}$ &c. & $xx - a \infty \sqrt{:a + \sqrt{:a + \sqrt{:a +}}}$ &c. $\infty\, x$: proinde $xx \infty x + a$, & $x \infty \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$. Q. E. D.

XXIX. *Datis duobus numeris quibusvis, ſi radix quadrata unius ducatur in alterum, & producti radix quadrata in primum, & hujus producti radix in alterum; atque ita ſemper productorum radices ducantur alternatim in datorum alterum; idque continuetur in infinitum: erit radix producti ultimi æqualis alterutri duorum mediorum proportionalium inter duos datos numeros* (putà ſi dati numeri dicantur a & b, erit $\sqrt{:a\sqrt{:b\sqrt{:a\sqrt{:b\sqrt{:a\sqrt{:b}}}}}}$. &c. $\infty \sqrt{C.\, aab}$.)

 Eſto

Eſto namque $x \propto \sqrt{:}a\sqrt{:}b\sqrt{:}a\sqrt{:}b.$ &c. erit $xx \propto a\sqrt{:}b. \sqrt{:}a\sqrt{:}b$ &c. & $\frac{xx}{a} \propto \sqrt{:}b\sqrt{:}a\sqrt{:}b.$ &c. & $\frac{x^4}{aa} \propto b\sqrt{:}a\sqrt{:}b.$ &c. & $\frac{x^4}{aab} \propto \sqrt{:}a\sqrt{:}b.$ &c. $\propto x$: proinde $x^4 \propto aabx$, & $x^3 \propto aab$, & $x \propto \sqrt{C}.\ aab$. Q. E. D.

XXX. *Datis duobus numeris quibusvis, ſi radix cubica producti ex utroque ducatur in eorum primum, & producti radix quadrata ducatur in productum ex utroque, & hujus producti radix cubica denuo in eorum primum; & ſic alternatim radices cubicæ & quadratæ ducantur in eorum primum & productum ex utroque, erit radix producti ultimi æqualis primo vel ſecundo quatuor mediorum proportionalium inter duos datos* (putà $\sqrt{:}a\sqrt{C}:ab\sqrt{:}a\sqrt{C}:ab$, &c. $\propto \sqrt{S}.\ a^4b$, & $\sqrt{C}:ab\sqrt{:}a\sqrt{C}:ab\sqrt{:}a$ &c. $\propto \sqrt{S}.\ a^3bb$.)

XXXI. *Datis duobus numeris quibusvis, ſi radix quadrata ſecundi ducatur in primum, & producti radix quadrata iterum in primum, producti vero hujus radix in ſecundum, & hujus producti radix denuò in primum, & ſic alternatim productorum radices multiplicentur, bis in primum, ſemel in ſecundum, erit radix producti ultimi* $\propto$ *primo, ſecundo vel quarto ſex proportionalium inter duos datos* (putà $\sqrt{:}a\sqrt{:}a\sqrt{:}b\sqrt{:}a\sqrt{:}a\sqrt{:}b$ &c. $\propto \sqrt{BS}.\ a^6b$, & $\sqrt{:}a\sqrt{:}b\sqrt{:}a\sqrt{:}a\sqrt{:}b\sqrt{:}a\sqrt{:}a$ &c. $\propto \sqrt{BS}.\ a^5bb$, & $\sqrt{:}b\sqrt{:}a\sqrt{:}a\sqrt{:}b\sqrt{:}a\sqrt{:}a$ &c. $\propto \sqrt{BS}.\ a^3b^4$.)

XXXII. *Datis duobus numeris quibusvis* p & q, *ſi tertius quicunque ductus in* q, *addatur ipſi* pp, *& ex radice ſummæ ſubtrahatur* p, *& reſidui radix in* q *ducta addatur ipſi* pp, *& ex radice ſummæ denuò ſubtrahatur* p, *& ſic deinceps in infinitum, erit radix ultimi reſidui*, putà $\sqrt{:}-p+\sqrt{:}pp+q\sqrt{:}-p+\sqrt{:}pp+q\sqrt{:}-p+$ &c. *radix æquationis cubicæ* $x^3 \propto -2px+q$.

XXXIII. *Iisdem poſitis, quæ in præcedente, ſi ſubtractio ipſius* p *vertatur in additionem, erit radix aggregati ultimi*, putà $\sqrt{:}+p+\sqrt{:}pp+q\sqrt{:}+p+\sqrt{:}pp+q\sqrt{:}$ &c. *radix æquationis* $x^3 \propto +2px+q$.

XXXIV. *Datis duobus numeris* p & q, *ſi tertius in* q *ductus ſubtrahatur à* pp, *& radix reliqui ad* p *addatur dematurve. & ſummæ reliquique radix in* q *ducta ſubducatur à* pp, *& radix reliqui*, &c. *erunt radices ſummæ reſiduique ultimi*, putà $\sqrt{:}p \pm \sqrt{:}pp-q\sqrt{:}p\pm\sqrt{:}pp-q\sqrt{:}$ &c. *radices æquationis* $x^3 \propto +2px-q$.

XXXV.

XXXV. *Non ſecus datis tribus numeris* p, q, r, *erit* $\sqrt{:} - p + \sqrt{:} pp + r + q \sqrt{:} - p + \sqrt{:} pp + r + q$ &c. *radix æquationis biquadratica* $x^4 \propto -2pxx + qx + r$.

Omnes hæ Propp. ad eundem modum demonſtrantur, quo Propp. XXVII. XXVIII. & XXIX. quorſum itaque κοκκύζειν!

Schol. Patet hinc aditus ad inventionem 2. med. proport. & in genere radicum Problematum ſolidorum & hyperſolidorum per ſolas rectas lineas & circulos, quam præſtantiſſimi omnium ſeculorum Geometræ à bis mille retro annis anxiè ſed fruſtrà quæſivere. Hanc ego, quoad fieri potuit, per ſeriem conſtructionis in infinitum continuandæ, primus omnium exhibui in Actis Lipſ. menſ. Septemb. 1689. cum nemo ſimile quicquam ſcripto publicaſſet, fortè nec animo concepiſſet uſpiam.

De Uſu Serierum Infinitarum in Quadraturis Spatiorum & Rectificationibus Curvarum.

Poſtquam prima parte laboris noſtri defuncti ſumus, variarumque quoad fieri potuit, ſerierum ſummas exhibuimus, ſupereſt, ut ad alteram inſtituti partem tranſeamus, oſtendendo modum eas applicandi ad dimenſiones quantitatum Geometricarum, præſertim illarum, quas tranſcendentes *nuncupant, licet ſeriebus, quæ hic uſui venient, raro contingat eſſe ex numero earum, quas proximè contemplati ſumus, quarumque ſummas in poteſtate habemus. Obſervarunt enim Geometræ, plurimas dari quantitates, cujusmodi ſunt pleræque Lineæ Curvæ, & pleraque ab iis comprehenſa ſpatia, quæ nullis numeris vel rationalibus vel ſurdis quantumvis compoſitis exprimi, h. e. quarum relationes ad alias datas ſub nulla æquatione algebraica definiti gradus cogi poſſent, ſed quæ omnes æquationum gradus quaſi tranſcenderent; ac idcirco attentandum duxerunt, num quas uno aliquo numero effari non poterant, per ſeriem ſaltem infinitorum, maximè rationalium, exprimere liceret, quibus ita continuò ad quæſitum accederetur, ut error tandem data quavis quantitate minor fieret, totaque ſeries exactum quæſiti valorem exhiberet. Inventum, quod, quantum conſtat, vergente demum hoc ſeculo à* Mercatore,

Gregorio, Newtono, Leibnitio, *in lucem productum fuit. Quid primi tres de his memoriæ prodiderint, etiamnum ignoramus. Summus Geometra Leibnitius, qui rem haud dubiè longiſſimè provexit, inter alias ſeries, quas nobis in Actis Lipſ. impertivit, unam initio Actorum 1682. pro Circuli magnitudine dedit ſed methodùm, qua illuc pervenit, nusquam expoſuit. Quantum conjicio, non differt illa à noſtra; nam & in easdem cum ipſo ſeries incidimus & ipſius ſubinde calculo differentiali uſi ſumus, uti poſthac patebit. Principia hujus calculi exponere nimis longum & alienum foret. Eä Vir perilluſtris D. Marchio* Hoſpitalius *in Libro de Analyſi infinitè parvorum nuperrimè edito perſpicuè tradit, ad quem proin Lectorem φιλομαθῆ remittimus.*

Definitio:

MIxtam Seriem voco, cujus termini multiplicatione ſunt conflati ex terminis ejusdem ordinis aliarum ſerierum. Ita ſi ſint ſeries $a, b, c, d, e,$ &c. & $f, g, h, i, k,$ &c. mixta ex utraque erit $af, bg, ch, di, ek,$ &c.

XXXVI.

Fractionem $\frac{1}{m-n}$ *convertere in ſeriem infinitam quantitatum geometricè proportionalium.*

Fit hoc per diviſionem continuam numeratoris per denominatorem, hoc pacto: m in l habeo $\frac{l}{m}$, quod multiplicatum per diviſorem $m-n$, & ſubtractum ex dividendo l relinquit $\frac{ln}{m}$; hoc rurſus diviſum per m facit $\frac{ln}{mm}$, quod ductum in $m-n$ & ſubtractum ex dividendi reliquo efficit reſiduum $\frac{lnn}{mm}$; hoc denuò diviſum per m, facit $\frac{lnn}{m^3}$, quo ducto in $m-n$ & ſubtracto remanet $\frac{ln^3}{m^3}$, atque ita deinceps ſine fine in infinitum: ſemper enim aliquid dividendum ſupereſt, cum unius membri dividendus à diviſore bimembri nunquam ſine reſiduo exhauriri poſſit. At hoc reſiduum, continuata operatione poſitoque $m > n$, perpetuo decreſcit, & tandem data quavis quantitate minus fit, ut patet. Eſt ergo fractio propoſita

$\frac{l}{m-n}$

$\frac{l}{m-n} \infty \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m3} + \frac{ln3}{m4} + \frac{ln4}{m5}$ &c. quæ ſeries eſt quantitatum geometricè progredientium in ratione m ad n; quandoquidem quilibet ejus terminus ex conſtructione in n ductus & per m diviſus proximè ſequentem exhibet.

Idem brevius ſic evincitur: Summa Progreſſionis Geometricæ $\frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m3} + \frac{ln3}{m4} + \frac{ln4}{m5}$ &c. eſt $\frac{l}{m-n}$, per Corollar. VIII. Ergo reciprocè valorem fractionis $\frac{l}{m-n}$ per talem ſeriem exprimere licet.

XXXVII. *Fractionem $\frac{1}{m+n}$ reſolvere in ſeriem infinitam geometricè proportionalium.*

Facta diviſione continua numeratoris per denominatorem, eadem reſultat ſeries, quæ anteà, niſi quod termini ejus alternatim fiant poſitivi & negativi. Eſt igitur quantitas $\frac{l}{m+n} \infty$ $\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m3} - \frac{ln3}{m4} + \frac{ln4}{m5}$ &c. ſaltem ſi ponatur $m > n$: tum enim quod poſt ſingulas diviſiones reliquum manet, continuo minuitur, donec continuata in infinitum operatione prorſus evaneſcat.

Idem quoque ſic eluceſcit: Quoniam in ſerie quantitatum $\frac{l}{m}, \frac{ln}{mm}, \frac{lnn}{m3}, \frac{ln3}{m4}, \frac{ln4}{m5}$ &c. ex hyp. primus terminus eſt ad ſecundum, ut tertius ad quartum, & quintus ad ſextum &c. nec non ſecundus ad tertium, ut quartus ad quintum, & ſextus ad ſeptimum &c. erit etiam ex æquo, primus ad tertium, ut tertius ad quintum, & quintus ad ſeptimum &c. quod docet, primum, tertium, quintum, ſeptimum &c. terminos exemptis reliquis etiam geometricè proportionales eſſe, quorum adeo ſumma per Corollar. VIII. invenitur $\frac{lm}{mm-nn}$. Eodem pacto oſtenditur, ſecundum, quartum, ſextum &c. terminos ſeriem geometricè proportionalium efficere, cujus ſumma $\frac{ln}{mm-nn}$. Igitur differentia harum

duarum ſerierum, ſeu $\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m3} - \frac{ln3}{m4} + \frac{ln4}{m5}$ &c. ∞ $\frac{lm - ln}{mm - nn} \infty \frac{l}{m+n}$, ac propterea quantitas $\frac{l}{m+n}$ in iſtam ſeriem viciſſim converti poteſt.

Coroll. 1. In omni Progreſſione Geometrica deſcendente (primo termino exiſtente determinato, ſignisque + & — alternatim ſe excipientibus) ſumma ſeriei limites habet, quos nequit attingere, nedum egredi, qualiscunque ſtatuatur ratio progreſſionis. Cum enim per hyp. $n > 0$, & $< m$, erit $\frac{l}{m+n} < \frac{l}{m+0} = \frac{l}{m}$; & $> \frac{l}{m+m} = \frac{l}{2m}$, hoc eſt, valor ſeriei perpetuo minor eſt ipſo primo termino, & major ejus ſemiſſe.

Coroll. 2. Si tamen $m \infty n$, fiet $\frac{l}{m+n} \infty \frac{l}{2m}$, & ſeries $\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m3} - \frac{ln3}{m4}$ &c. $\infty \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. unde paradoxum fluit non inelegans, quod $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. $\infty \frac{l}{2m}$. Etenim ſi ultimus ſeriei terminus ſigno — affectus concipiatur, termini omnes ſe mutuò deſtruere apparebunt, & ſi ſigno +, æquari videbnntur ipſi $\frac{l}{m}$, non $\frac{l}{2m}$. Ratio autem paradoxi eſt, quod continuata diviſione ipſius l per $m+m$, reſiduum diviſionis non minuitur, ſed perpetuo ipſi l æquale manet; unde quotiens diviſionis propriè non eſt ſola ſeries $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. ſed $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. + vel $- \frac{l}{2m}$, faciendo ſcil. fractionem ex reſiduo & diviſore, illamque ſigno + vel — afficiendo, prout ultimus ſeriei terminus viciſſim — vel + habere fingitur.

XXXVIII. *Fractionem* $\frac{1}{\square : m - n}$ *transmutare in ſeriem infinitam.*

Quoniam quantitas $\frac{l}{m-n} \infty \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m3} + \frac{ln3}{m4}$ &c. per XXXVI. facta utrinque multiplicatione per $\frac{1}{m-n}$, habebitur $\frac{l}{\square : m-n} \infty$

ſeriei

ſeriei A, cujus termini ſinguli de novo in totidem alias ſeries B, C, D, E, F, &c. per eandem XXXVI. Prop. convertantur. Quo facto ſerierum iſtarum termini homologi in unam ſummam

$$\frac{l}{\square : m-n} \infty\, A \begin{cases} \frac{l}{mm-mn} \infty \frac{l}{mm} + \frac{ln}{m3} + \frac{lnn}{m4} + \frac{ln3}{m5} + \frac{ln4}{m6} \text{ \&c.} \infty\, B \\ \frac{ln}{m3-mmn} \infty \;.\; + \frac{ln}{m3} + \frac{lnn}{m4} + \frac{ln3}{m5} + \frac{ln4}{m6} \text{ \&c.} \infty\, C \\ \frac{lnn}{m4-m3n} \infty \;.\;.\; + \frac{lnn}{m4} + \frac{ln3}{m5} + \frac{ln4}{m6} \text{ \&c.} \infty\, D \\ \frac{ln3}{m5-m4n} \infty \;.\;.\;.\;.\; + \frac{ln3}{m5} + \frac{ln4}{m6} \text{ \&c.} \infty\, E \\ \frac{ln4}{m6-m5n} \infty \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \frac{ln4}{m6} \text{ \&c.} \infty\, F \\ \text{\&c.} \infty \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{\&c.} \infty \text{ \&c.} \end{cases}$$

$$Z \infty \frac{l}{mm} + \frac{2ln}{m3} + \frac{3lnn}{m4} + \frac{4ln3}{m5} + \frac{5ln4}{m6} \text{ \&c.} \infty \frac{l}{\square : m-n}$$

conflati novam ſeriem Z conſtituent, æqualem propterea quantitati propoſitæ $\frac{l}{\square . m-n}$, mixtamque ex ſerie numerorum naturalium 1. 2. 3. 4. &c. & quantitatum geometricé progreſſionalium $\frac{l}{mm}$, $\frac{ln}{m3}$ $\frac{lnn}{m4}$, $\frac{ln3}{m5}$ &c.

Eadem ſeries Z elici quoque poteſt diviſione continua numeratoris l per denominatorem $mm-2mn+nn$, dicendo: mm in l, habeo $\frac{l}{mm}$, quod ductum in diviſorem & ſubtractum ex dividendo relinquit $+\frac{2ln}{m}-\frac{lnn}{mm}$; tum porrò mm in $+\frac{2ln}{m}$, reperio $+\frac{2ln}{m3}$, quod multiplicatum & ſubtractum, ut decet, reſiduum efficit $+\frac{3lnn}{mm}-\frac{2ln3}{m3}$, atque ita ulterius pergendo in infinitum: quo pacto obſervabitur, poſt ſingulas operationes duo membra reliqua manere, ſed illa uſque & uſque minora, tandemque data quavis quantitate propius ad nihilum vergentia.

Idem etiam oſtenditur ex lege reciprocorum, reſolvendo ſeriem Z methodo Prop. XIV. in infinitas ſeries geometricas B, C, D, E, F &c. harum enim ſummæ cum novam progreſſionem A conſtituant,

tuant, quæ ipſa ſummam efficit $\frac{l}{mm - 2mn + nn}$, ſequitur reciprocè, & hanc quantitatem $\frac{l}{\square : m - n}$ per ſeriem Z legitimè efferri poſſe.

XXXIX. *Fractionem* $\frac{1}{\square : m + n}$ *convertere in ſeriem.*

Si operatio inſtituatur methodo Propoſ. præced. eadem, quæ ibi, obtinebitur ſeries, niſi quod termini locorum parium acquirant ſignum —, ſic ut habeatur: $\frac{l}{\square : m + n} \infty \frac{l}{mm} - \frac{2ln}{m^3} + \frac{3lnn}{m^4} - \frac{4ln^3}{m^5} + \frac{5ln^4}{m^6} - \frac{6ln^5}{m^7}$ &c.

XL. *Fractionem* $\frac{1}{C : m - n}$, *aut* $\frac{1}{C : m + n}$, *exprimere per ſeriem.*

Ex analogia operationum præcedentium liquet modus hoc efficiendi; quorſum igitur plura? En operationem:

$$\frac{l}{\square : m - n} \infty \frac{l}{mm} + \frac{2ln}{m^3} + \frac{3lnn}{m^4} + \frac{4ln^3}{m^5} + \frac{5ln^4}{m^6}\ \&c.$$

per XXXVIII, factaque hinc inde multiplicatione per $\frac{1}{m - n}$,

$$\frac{l}{C : m - n} \infty \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{m^3 - mmn} \infty \frac{l}{m^3} + \frac{ln}{m^4} + \frac{lnn}{m^5} + \frac{ln^3}{m^6} + \frac{ln^4}{m^7}\ \&c. \\ \frac{2ln}{m^4 - m^3 n} \infty \cdot + \frac{2ln}{m^4} + \frac{2lnn}{m^5} + \frac{2ln^3}{m^6} + \frac{2ln^4}{m^6}\ \&c. \\ \frac{3lnn}{m^5 - m^4 n} \infty \cdot \cdot + \frac{3lnn}{m^5} + \frac{3ln^3}{m^6} + \frac{3ln^4}{m^7}\ \&c. \\ \frac{4ln^3}{m^6 - m^5 n} \infty \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{4ln^3}{m^6} + \frac{4ln^4}{m^7}\ \&c. \\ \&c. \infty \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \&c. \end{array} \right\} \text{per Prop. XXXVI.}$$

$$\frac{l}{m^3} + \frac{3ln}{m^4} + \frac{6lnn}{m^5} + \frac{10ln^3}{m^6} + \frac{15ln^4}{m^7}\ \&c. \infty \frac{l}{C : m - n}.$$

Eodem pacto habetur $\frac{l}{C : m + n} \infty \frac{l}{m^3} - \frac{3ln}{m^4} + \frac{6lnn}{m^5} - \frac{10ln^3}{m^6} + \frac{15ln^4}{m^7}$ &c.

Conflantur autem termini harum ſerierum ex ductu terminorum progreſſionis geometricæ in numeros trigonales 1. 3. 6. 10. 15. &c.

Si quis idem per diviſionem continuam conſequi deſideret, is obſer-

obſervabit, poſt ſingulas operationes tria ſupereſſe membra, ſed ea ſubinde minora, ultimoque prorſus evaneſcentia.

Idem etiam regrediendo à ſerie inventâ patebit, ſi illa methodo Prop. XIV. in alias reſolvatur, &c.

Schol. Haud diſſimili operatione reperitur $\frac{l}{QQ:m8n} \infty \frac{l}{m4} 8 \frac{4ln}{m5} + \frac{10lnn}{m6} 8 \frac{20ln^3}{m7}$ &c. ut & $\frac{l}{Ss:m8n} \infty \frac{l}{m5} 8 \frac{5ln}{m6} + \frac{15lnn}{m7} 8 \frac{35ln^3}{m8}$ &c. ſeriebus mixtis ex geometrica & ſerie pyramidalium, trianguli-pyramidalium, & ita conſequenter in omnibus altioribus, ſervatâ ſemper eadem analogiæ ratione, ut non opus ſit his diutius immorari.

XLI. *Si proponatur ſeries differentialium, quæ mixta ſit ex ſerie geometrica quantitatum indeterminatarum, & alia quavis ſerie quantitatum constantium ſeu coëfficientium, integralia eorum abſoluta ſeriem conſtituent mixtam ex eadem ſerie coëfficientium, ſimili geometrica indeterminatarum, & alia quadam harmonica.*

Patet ex princ. calc. diff. vel ſummatorii, juxta quæ quantitatis differentialis $nx^m dx$ integrale abſolutum reperitur $\frac{n.x^{m+1}}{m+1}$; hinc enim ſi coëfficientes n ſint progreſſionis cujusvis, & exponentes m progreſſionis arithmeticæ, h. e. ipſa x^m progr. geometricæ, erunt quoque $m+1$ arithm. adeoque x^{m+1} geometr. & $\frac{1}{m+1}$ harmonicæ progreſſionis. Ut ſi proponatur ſeries differentialium $axdx$, bx^3dx, cx^5dx, fx^7dx &c. mixta ex ſerie quavis a, b, c, f &c. & geometrica xdx, x^3dx, x^5dx, x^7dx &c. erunt eorum integralia $\frac{axx}{2}, \frac{bx4}{4}, \frac{cx6}{6}, \frac{fx8}{8}$ &c. mixta ex eadem ſerie a, b, c, f &c. geometrica ſimili $xx, x4, x6, x8$ &c. & harmonica $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ &c.

XLII. *Exhibere aream Hyperbolæ inter Aſymptotas per ſeriem infinitam.* Fig. 1.

Mod. 1. *Per Arithm. Infin. Wall.* Eſto Hyperbola PCQ, cujus centrum A, aſymptotæ AD, AS, applicatæ BC, IO (ιo), quærendumque ſit ſpatium CBIO (CBιo). Sumto autem AB ∞ 1 ∞

BD, BC ꝏ b, BI (Bι) ꝏ x, quæ non ſit > AB vel BD, h. e. unitate. Dividatur BI (Bι) in partes aliquot æquales BE, EF, FG, GR, RI (Bϵ, $\epsilon\phi$, $\phi\gamma$, $\gamma\varrho$, $\varrho\iota$) quarum numerus ſit n, & ſingulæ dicantur d, ſic ut nd ſit ꝏ x ꝏ BI (Bι). Tum circumſcribantur (inſcribantur) hyperbolæ parallelogramma BK, EL, FM, GN, RO (B$\varkappa$, $\epsilon\lambda$, $\phi\mu$, $\gamma\nu$, ϱo) ductis applicatis EK, FL, GM, RN, IO ($\epsilon\varkappa$, $\phi\lambda$, $\gamma\mu$, $\varrho\nu$, ιo) quæ ex natura hyperb. ordine reperiuntur ꝏ $\frac{b}{1 8 d}$, $\frac{b}{1 8 2d}$, $\frac{b}{1 8 3d}$, $\frac{b}{1 8 4d}$ &c. uſque ad ultimam $\frac{b}{1 8 nd}$. Singulis igitur in d ductis, habentur areæ parallelogrammorum, quæ porro in ſeries convertendæ ſunt per XXXVI. & XXXVII, ut ſequitur:

BK (B$\varkappa$) ꝏ $\frac{bd}{1 8 d}$ ꝏ bd 8 bdd + bd^3 8 bd^4 + bd^5 8 bd^6 &c.

EL ($\epsilon\lambda$) ꝏ $\frac{bd}{1 8 2d}$ ꝏ bd 8 $2bdd$ + $4bd^3$ 8 $8bd^4$ + $16bd^5$ 8 $32bd^6$ &c.

FM ($\phi\mu$) ꝏ $\frac{bd}{1 8 3d}$ ꝏ bd 8 $3bdd$ + $9bd^3$ 8 $27bd^4$ + $81bd^5$ 8 $243bd^6$ &c.

GN ($\gamma\nu$) ꝏ $\frac{bd}{1 8 4d}$ ꝏ bd 8 $4bdd$ + $16bd^3$ 8 $64bd^4$ + $256bd^5$ 8 $1024bd^6$ &c.

Ult. RO (ϱo) ꝏ $\frac{bd}{1 8 nd}$ ꝏ bd 8 $nbdd$ + $nnbd^3$ 8 n^3bd^4 + n^4bd^5 8 n^5bd^6 &c.

Harum ſerierum primi termini æquantur, ſecundi progrediuntur ut numeri naturales, tertii ut eorundem quadrata, quarti ut cubi, &c. hinc poſito numero ſerierum ſeu parallelogrammorum n infinito (quo quidem caſu ſumma parall-orum ſeu inſcript. ſeu circumſcriptorum ab ipſo curvilineo CBIO vel CBιo non differt) ſumma terminorum primæ ſeriei perpendicularis erit æqualis, terminorum ſecundæ dimidia, tertiæ ſubtripla &c. ſummæ totidem, hoc eſt, n terminorum ultimo æqualium, per ea, quæ docet Walliſius in Arithm. Infinit. noſque demonſtrabimus alibi: ac propterea ſumma omnium ſerierum perpendicularium, i. e. omnium parallelogrammorum, ſeu area ſpatii hyperbolici CBIO (CBιo) hac ſerie exprimetur:

$$\frac{nbd}{1} \; 8 \; \frac{nnbdd}{2} + \frac{n^3bd^3}{3} \; 8 \; \frac{n^4bd^4}{4} + \frac{n^5bd^5}{5} \; 8 \; \frac{n^6bd^6}{6} \text{ \&c.}$$

ſive, loco nd ſubſtituendo x,

$\frac{bx}{1} - \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} - \frac{bx^6}{6}$ &c.

Mod. 2. *Per Calc. diff. Leibn.* Poſitis, ut prius, $AB \infty 1 \infty BD$, $BC \infty b$, & BI ($B\iota$) ∞x, ejusque elemento RI ($\rho\iota$) ∞dx, erit ex natura hyperbolæ IO (ιo) $\infty \frac{b}{1 \pm x}$, & elementum ſpatii hyperbolici RO (ρo) $\infty \frac{bdx}{1 \pm x} \infty$ ſeriei geometricæ $bdx - bxdx + bxxdx - bx^3dx + bx^4dx$ &c. per XXXVI. & XXXVII; adeoque ſumma elementorum $S\frac{bdx}{1 \pm x}$, ſive ſpatium CBIO ($CB\iota o$) $\infty bx - \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5}$ &c. eadem ſeries, quæ ſuprà, mixta ſc. ex geometrica & harmonica, per præced. Hæc igitur ſi ſummari poſſet, daretur Hyperbolæ quadratura.

Coroll. 1. Si $BI \infty B\iota$, dabitur tum ſumma tum differentia ſpatiorum CBIO & $CB\iota o$ per ſeriem ex geom. & harm. mixtam: cum enim ſit oſtenſum

$$CBIO \infty bx + \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} + \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} + \frac{bx^6}{6} \text{ \&c.}$$
$$CB\iota o \infty bx - \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} - \frac{bx^6}{6} \text{ \&c.}$$

fiet facta ſerierum additione & ſubtractione,

$$CBIO + CB\iota o \infty \frac{2bx}{1} + \frac{2bx^3}{3} + \frac{2bx^5}{5} \text{ \&c.}$$
$$CBIO - CB\iota o \infty \frac{2bxx}{2} + \frac{2bx^4}{4} + \frac{2bx^6}{6} \text{ \&c.}$$

Coroll. 2. Poſita BI, $x \infty$ BA, 1, fit ſpatium interminatum hyperbolicum PCBAS $\infty \frac{b}{1} + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{5} + \frac{b}{6}$ &c. ſimplici ſeriei harmonicæ, quæ cum infinita ſit per XVI, arguit & aream hujus ſpatii talem eſſe. Conf. Cor. 4. ejusd. Prop.

Cor. 3. Sin & $B\iota$, x, ∞ BD, 1∞ BC, b, reſultat pro ſpatio CBDQ ſeries harmonica $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ &c. hoc eſt, ſubducendo unumquemque terminum ſigno — affectum à præcedenti, ſeries $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56}$ &c. cujus termini per ſaltum excerpti ſunt ex ſerie reciproca trigonalium Q Prop. XV, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ &c.

Quòd ſi ſtatuatur □ AB, BC vel BD quadruplo minus, np. $\frac{1}{4}$, exhibebitur etiam ſpatium CBDQ per ſeriem prioris ſubquadruplam $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120}$ &c. quæ per ſaltum formatur ex ſerie I Propoſ. XVII. Conf. Act. Lipſ. 1682. p. 46.

XLIII. *Invenire aream ſpatii ABEFS (BDφ) comprehenſi Aſymptota hyperbolæ AD, & Curva BEF (ιφ), quæ talis, ut ▭ ſub ejus applicata IE (ιι) & recta conſtante AB, BC vel BD (quæ ſit 1) æquetur ſpatio hyperbolico CBIO (CBιο).* Fig. 2.

Quoniam, poſita BI ∞ x, ſpatium hyperbolicum CBIO $\infty\ x + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c. per præced. eadem quoque ſeries denotabit (ob AB vel BC ∞ 1) longitudinem applicatæ IE, quæ propterea ducta in IR ſeu dx producit $x\,dx + \frac{xxdx}{2} + \frac{x^3dx}{3} + \frac{x^4dx}{4} + \frac{x^5dx}{5}$ &c. ∞ RE, elem. ſpatii BIE. Hujus ſeriei terminos ſummando fit ſpatium BIE $\infty\ \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^6}{30}$ &c. ſeriei mixtæ ex geometrica & reciproca trigonalium, quæ poſito inſuper BI, x ∞ BA, 1, mutatur in ſimplicem trigonalium reciprocam $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ &c. cujus ſumma ∞ 1, per XV. Eſt igitur totum ſpatium ABEFS abſolutè quadrabile, æquale quippe □to AB. Nota hîc exemplum Curvæ mechanicæ, ubi quadratura ſpecialis ſuccedit abſque generali; ſimplicis enim ſeriei ſummam dedimus, mixtæ non item.

Eadem ratione oſtendetur ex altero latere ſpatium Bιι $\infty\ \frac{xx}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{20}$ &c. totumque ſpatium BDφ $\infty\ \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20}$ &c.

Coroll. Completis rectangulis CD & BQ, ajo fore curvilineum mechanicum BDφ ∞ duplo curvilineo hyperbolico CQL, differentiam curvilineorum ABEFS & BDφ ∞ duplo ſpatio CQH, & ſummam eorundem ∞ 2 CBDQ; quæ ſic palàm fiunt: Si à ſerie $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ &c. ſubducatur $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{7}$ &c. auferendo ſigillatim primum terminum à primo, ſecundum à ſecundo, tertium à tertio, &c. relinquetur $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} +$

$\frac{1}{12} -$

$\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}-\frac{1}{42}$ &c. ∞ ſpatio $BD\varphi$, ut oſtenſum. Si vero eadem ſeries ex altera ſic tollatur, ut primus ejus terminus dematur ex ſecundo alterius, ſecundus ex tertio, tertius ex quarto &c. orietur $\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{5}-\frac{2}{6}$ &c. ∞ $\frac{2}{1}-\frac{2}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}$ &c. -1∞ (per præced.) duplo ſpat. hyperb. $CBDQ - BH \infty 2\,CBDQ - 2\,DL \infty 2\,CLQ$. Ergo $BD\varphi \infty 2\,CLQ$. Igitur cum oſtenſum etiam ſit $ABEFS \infty 1 \infty BH \infty 2\,DL \infty 2\,LH$, erit $ABEFS - BD\varphi \infty 2\,LH - 2\,CLQ \infty 2\,CQH$; nec non $ABEFS + BD\varphi \infty 2\,DL + 2\,CLQ \infty 2\,CBDQ$. Quæ erant demonſtr.

XLIV. *Invenire aream ſpatii ABKGMT (BDNγK) comprehenſi aſymptota hyperbolæ AD, & Curva KGM (KγN), quæ talis, ut ▭ BIG (Bιγ) ſub ejus applicata IG (ιγ) & indeterminata BI (Bι), æquetur ſpatio hyperbolico CBIO (CBιω).* Fig. 2.

Quia poſitis omnibus, ut prius, ſpatium hyperb. $CBIO \infty x + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c. per XLII, erit per hyp. facta diviſione per BI ſeu x, recta $IG \infty 1 + \frac{x}{2} + \frac{xx}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5}$ &c. adeoque RG elem. ſpat. $BIGK \infty dx + \frac{xdx}{2} + \frac{xxdx}{3} + \frac{x^3dx}{4}$ &c. omniaq; RG ſeu ſpatium $BIGK \infty \frac{x}{1} + \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{25}$ &c. & poſita $x \infty 1$, ſpatium totale $ABKGMT \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ &c. ſeriei reciprocæ quadratorum, cujus ſummam etiamnum deſideramus. Conf. Prop. XVII. ſub fin.

Haud diſſimili modo reperitur ex altera parte ſpatium $B\iota\gamma K \infty \frac{x}{1} - \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{25}$ &c. ſumtaque $x \infty 1$, totale ſpatium $BDN\gamma K$ & $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ &c.

Coroll. Spatium ABKGMT duplum eſt ſpatii $BDN\gamma K$; cum enim ſumma utriusque ſit $\frac{2}{1} + \frac{2}{9} + \frac{2}{25}$ &c. & differentia $\frac{2}{4} + \frac{2}{16} + \frac{2}{36}$ &c. erit utique ſumma ad differentiam, ut $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}$ &c. ad $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36}$ &c. h. e. ut 3 ad 1, per XXIV; unde ſpatium unum alterius duplum eſſe neceſſe eſt, ut maximè neutrius abſolutam magnitudinem exploratam habeamus. Vid. Schol. ibid.

XLV. *Exhibere Quadraturam Circuli aut Rectificationem Lineæ Circularis per ſeriem.* Fig. 3.

In peripheria ſemicirculi BCD, ſumto indefinitè puncto H, demittatur ex illo in radium AB perpendicularis HE; & ſit AB ∞ 1, & BE ∞ x, adeoque ex nat. circ. EH ∞ $\sqrt{2x - xx}$: quo poſito, cum ob ſimil. Triangul. characteriſtici LGH & Triangul. HEA, HE ſit ad HA, ſicut LG vel EF elem. abſciſſæ BE, ad LH elem. arcus circ. BH, reperitur LH ∞ $\frac{dx}{\sqrt{2x - xx}}$, factaque multiplicatione per $\frac{1}{2}$, ſemiſſem radii AH, ſector HAL ſeu elem. ſectoris HAB ∞ $\frac{dx}{2\sqrt{2x - xx}}$. Hæc igitur quantitas, cum abſolutè ſummari nequeat, in ſeriem convertenda eſt, ſed prius tollenda irrationalitas, quod eo ferè modo fit, quo in Problematis Diophanteis uti vulgo ſueverunt. In hunc finem pono $\sqrt{2x - xx}$ ∞ $\frac{x}{t}$, ſeu $2x - xx$ ∞ $\frac{xx}{tt}$, ubi quia diviſio fieri poteſt per x, ipſaque non niſi unius dimenſionis in æquatione relinquitur, ejus valor in rationalibus prodibit, unde & dx, & per hypoth. $\sqrt{2x - xx}$ ſeu $\frac{x}{t}$, ipſaque adeo fractio $\frac{dx}{2\sqrt{2x - xx}}$, rationales fient; nempe x ∞ $\frac{2tt}{1 + tt}$, dx ∞ $\frac{4tdt}{\square : 1 + tt}$, $\sqrt{2x - xx}$ ∞ $\frac{x}{t}$ ∞ $\frac{2t}{1 + tt}$, & deniq; $\frac{dx}{2\sqrt{2x - xx}}$ ∞ $\frac{dt}{1 + tt}$; hinc fractio in ſeriem geometricam per XXXVII converſa exhibet $dt - ttdt + t^4 dt - t^6 dt + t^8 dt$ &c. Summa igitur elementorum HAL, ſeu totus ſector HAB ∞ $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9}$ &c. eoque per ſemiſſem radii $\frac{1}{2}$ diviſo, arcus BH ∞ $\frac{2t}{1} - \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{2t^9}{9} - \frac{2t^{11}}{11}$ &c. quæ ſeries mixtæ ſunt ex geometrica & harmonica, per XLI, à quarum proin ſummatione decantatum illud de Circuli Tetragoniſmo Problema dependet. Nota, ductis ex B & H tangentibus circuli BI, HI, ſibi mutuo occurrentibus in I, junctaque HD, quæ radium AC ſecet in K, fore BI vel IH ∞ AK, utramlibet autem ∞ t. Nam 2. ang. BAI ∞ BAH ∞ AHD + ADH ∞ 2 ADH. Ergo BAI ∞

ADH;

ADH; cumque & ABI & DAK anguli, nec non latera AB & AD æquentur, erit quoque BI ∞ AK. Deinde cum ſit per hypoth. 1 ad t, ut $\sqrt{2x - xx}$ ad x; itemque ob ſim. △ DAK & DEH, AD ſeu 1 ad AK, ſicut DE ad EH, hoc eſt, ex nat. circul. HE ad EB, ſeu $\sqrt{2x - xx}$ ad x; erit utique $1 . t :: 1 .$ AK, ac proinde AK ſeu BI ∞ t.

Coroll. 1. Sumta t ∞ 1, quo caſu & BE, x ſeu $\frac{2tt}{1+tt}$, æquatur BA, 1, fiet quadrans BAC ∞ ſimplici ſeriei harmonicæ $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. ∞ (ſubducto reapſe unoquoque termino ſigno — affecto à præcedente) $\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99}$ &c. Hinc quia quadratum radii eſt ad quadrantem circuli, ſicut quadratum diametri ad totum circulum, ſequitur ſi quadratum diametri, h. e. quadratum circulo circumſcriptum ſit 1, ac proin eidem inſcriptum $\frac{1}{2}$, totius circuli aream per modo memoratam ſeriem expreſſum iri; adeoque ſi quadratum circulo inſcriptum ſit $\frac{1}{4}$, circuli aream fore $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ &c. cujus ſeriei termini per ſaltum excerpti ſunt ex ſerie H Prop. XVII. Conf. Act. Lipſ. 1682. p. 45.

Coroll. 2. Poſita Tangente BI ∞ t, erit arcus, cujus tangens eſt, ∞ $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$ &c. utpote ſemiſſis arcus BH. Confer Act. Lipſ. 1691. pag. 179.

XLVI. *Exhibere generaliter Sectorem cujusvis Sectionis Conicæ ex centro per ſeriem.* Fig. 4. & 5.

Eſto Coni Sectio quæcunque, Hyperbola ſive Ellipſis, BCD, cujus centrum A, vertex B, ſemi-latus transverſum AB ∞ a, ſemi-axis conjugatus AL ∞ 1, adeoque ſemi-latus rectum ∞ $\frac{1}{a}$, & ratio laterum, ut aa ad 1. Ponanturque porrò, abſciſſa indeterminata BG ∞ x, AG ∞ z ∞ a ♉ x (♉ ſignificat + in Hyperbol. & — in Ellipſ. uti ♉ viciſſim — in Hyp. & + in Ell.) ejusque elementum FG vel CH ∞ dx ∞ ♉ dz, ordinata GD ∞ y, ejus elementum DH ∞ dy, & jungens D cum centro recta AD ∞ u ∞ $\sqrt{zz + yy}$. Ducta etiam intelligatur HCI parallela axi, ſecansque

quæ curvam in C & rectam AD in I, atque ex C demiſſa concipiatur in AD perpendicularis CE. Quibus poſitis, erit primo ex nat. Curv. $aa . 1 :: \pm zz \pm aa (2ax \pm xx) . yy$; unde fit $aayy \infty \pm zz \pm aa (2ax \pm xx)$, & differentiando $aaydy \infty \pm zdz$, & denique $dy \infty \frac{\pm zdz}{aay} \infty \frac{zdx}{aay}$. Deinde quoniam, ob ſim. △ DGA & DHI, DG, y eſt ad GA, z, ſicut DH, dy, ad HI, invenitur HI $\infty \frac{zdy}{y}$, ac proinde CI (HI $\pm$ HC) $\infty \frac{zdy}{y} - dz \infty \frac{zdy - ydz}{y}$. Quare denuò propter △ ſim. AGD & IEC, ut AD, u, ad DG, y, ſic IC, $\frac{zdy - ydz}{y}$, ad CE; unde reperitur CE $\infty \frac{zdy - ydz}{u}$, quæ ducta in ſemiſſem AD, ſeu $\frac{1}{2}u$, dat aream trianguli elementaris ACD $\infty \frac{zdy - ydz}{2} \infty$ (poſito loco dy valore ejus) $\frac{\pm zzdz}{2aay} - \frac{ydz}{2} \infty \frac{\pm zzdz - aayydz}{2aay} \infty$ (ſubſtituendo $\pm zz \pm aa$ loco $aayy$) $\frac{\pm zzdz \pm zzdz \pm aadz}{2aay} \infty \frac{\pm adz}{2y} \infty \frac{adx}{2ay} \infty$ (loco ay ſurrogando $\sqrt{2ax \pm xx}$) $\frac{adx}{2\sqrt{2ax \pm xx}}$, de qua in ſeriem convertenda & ſummanda agitur. Primò autem irrationalitas ex illa tollenda, mediante alia indeterminata, quæ loco x ſurrogari debet, ut in præc. Pono itaque $\sqrt{2ax \pm xx} \infty \frac{x}{t}$, unde fluit $x \infty \frac{2att}{1 \pm tt}$, & $dx \infty \frac{4atdt}{\square : 1 \pm tt}$, & $\sqrt{2ax \pm xx} \infty \frac{x}{t} \infty \frac{2at}{1 \pm tt}$, & denique $\frac{adx}{2\sqrt{2ax \pm xx}} \infty \frac{adt}{1 \pm tt} \infty$ ſeriei geom. $adt \pm attdt + at^4dt \pm at^6dt + at^8dt$ &c. per XXXVI & XXXVII. Summa igitur omnium ſectorum elementarium ACD, i. e. area totius Sectoris ABCD $\infty at \pm \frac{at^3}{3} + \frac{at^5}{5} \pm \frac{at^7}{7} + \frac{at^9}{9}$ &c. ▭ ſcil. comprehenſo ſub a ſemi-latere transverſo & recta, cujus longitudo eſt $t \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9}$ &c. Unde patet, quo pacto generaliter quadraturæ ſectionum Conicarum ad ſummas ſerierum ex geomet. & harmon. mixtarum reducantur.

Nota,

Nota, ductis per verticem B & punctum Curvæ D tangentibus BM, DT, ſibi mutuo occurrentibus in M, dico fore BM $\infty\ t$. Quoniam enim AG. AB :: AB. AT, per 37. lib. 1. Apoll. ac idcircò convertendo AB. TB :: AG, z. GB, x; nec non (ob ſim. △ TBM & CHD) TB. BM :: CH, dx. HD, dy :: (ex æquat. Curvæ different.) aay. z; erit ex æquo perturbatè AB, a. BM :: aay. x; unde obtinetur BM $\infty \frac{x}{ay} \infty \frac{x}{\sqrt{2ax - xx}}$; adeoque $\sqrt{2ax - xx}$. x :: 1. BM: verum per conſtructionem $\sqrt{2ax - xx}$. x :: 1. t. Ergò omnino BM $\infty\ t$. Conf. Act. Lipſ. 1691. p. 179.

XLVII. *Dato Numero invenire Logarithmum per ſeriem.* Fig. 6.

Intelligatur ſuper axe SAσ Curva quædam CBκ, ejus naturæ, ut abſciſſæ AR, AS (Aϱ, Aσ) creſcant arithmeticè, dum applicatæ RE, SC ($\varrho\varepsilon$, $\sigma\kappa$) creſcunt vel decreſcunt geometricè, h. e. ut iſtæ ſint ut Numeri, dum illæ ſunt ut Logarithmi. Vocabitur hæc Curva *Logarithmica*, cujus hæc eſt proprietas, oſtendente Acut. Leibnitio in Act. Lipſ. 1684. p. 473. ut Subtangentes ejus omnes AK, RN, $\varrho\nu$ ſint æquales. Applicetur in A recta AB, & ſumto quovis in curva puncto E (ε) ducatur recta EI ($\varepsilon\iota$) parallela axi SA; vocetur que AB 1, BI (Bι) x; adeoque AI (Aι) ſeu RE ($\varrho\varepsilon$) $1 - x$; nec non AR (Aϱ) y, & conſtans curvæ ſubtangens b. Dato itaque numero RE ($\varrho\varepsilon$) ejus Logarithmus AR (Aϱ) ſic invenitur. Quoniam ex nat. gen. curvarum, elementum applicatæ EF ($\varepsilon\varphi$) dx, eſt ad elementum abſciſſæ FG ($\varphi\gamma$) dy, ſicut applicata RE ($\varrho\varepsilon$) $1 - x$, ad curvæ ſubtaugentem RN ($\varrho\nu$) b, habebitur $dy \infty \frac{b\,dx}{1 - x} \infty$ fractione in ſeriem reſoluta per XXXVI & XXXVII) $b\,dx - bx\,dx + bxx\,dx - bx^3\,dx + bx^4\,dx - bx^5\,dx$ &c. ideoque facta ſummatione, y, hoc eſt, AR (Aϱ) $\infty\ bx - \frac{bxx}{2} + \frac{bx3}{3} - \frac{bx4}{4} + \frac{bx5}{5} - \frac{bx6}{6}$ &c. quæ inſuper in caſu ſpeciali BI (Bι) ∞ BA ∞ BD, ſeu $x \infty 1$, fit $b - \frac{b}{2} + \frac{b}{3} - \frac{b}{4} + \frac{b}{5} - \frac{b}{6}$ &c.

Cor. I.

Coroll. 1. Identitas hujus ſeriei cum illa, quam ſupra Prop. XLII. pro ſpatio Hyperbolico quadrando reperiimus, de mutua dependentia & affinitate inter Hyperbolam & Logarithmos nos admonet, perſpicuumque facit, quod ſumtis in utraque Fig. 1. & 6. ipſis BI (Bι) æqualibus ſpatium hyperbolicum CBIO (CBιο) æquetur ▭lo ſub unitate AB & Logarithmo AR (Aρ). Unde porrò infertur, quòd ſumtis utrobique AB, Aι, AD, hoc eſt, AB, ρι, σκ continuè proportionalibus, quo caſu ex natura Logarithmicæ Aσ dupla fiet ipſius Aρ, ſpatium hyperbolicum CBDQ duplum quoque ſit ipſius CBιο, indeque CBιο, οι DQ ſpatia futura ſint æqualia.

Coroll. 2. Quoniam evidens eſt, exiſtente BI ꝏ AB, h. e. evaneſcente AI ſeu RE, Logarithmum AR reddi infinitum, ſequitur & ſeriem harmonicam Logarithmum hunc exprimentem, $b + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{5}$ &c. talem eſſe; unde denuò veritas Prop. XVI. conſtat.

Coroll. 3. Dato quovis Logarithmo putà binarii, determinari poteſt ex illo curvæ ſubtangens b; cum enim poſita BD ꝏ 1 ꝏ AB, adeoque AD ꝏ σκ ꝏ 2, oſtenſum ſit Aσ Log-um binarii eſſe ꝏ $b - \frac{b}{2} + \frac{b}{3} - \frac{b}{4}$ &c. ꝏ b in $\overline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$ &c. erit viciſſim b ꝏ $\frac{\text{Log. 2.}}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ \&c.}}$

XLVIII. *Dato Sinu complementi reperire Logarithmum Sinus recti per ſeriem.* Fig. 6.

In eadem fig. centro A per B deſcriptus eſto circuli quadrans BHσ, quem producta EI ſecet in H, erit AI ſeu RE ſinus arcus Hσ, & AR ejus Logarithmus, exiſtente vid. radii AB ceu unitatis Logarithmo o. Ponatur ſinus complementi IH ꝏ x, ut fiat ſinus rectus AI ſeu RE ꝏ $\sqrt{1 - xx}$, ejusque elementum EF ꝏ $\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-xx}}$, erit ex nat. gen. curv. EF $\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-xx}}$ ad FG, elementum Log-i AR; ut RE, $\sqrt{1 - xx}$ ad ſubtangentem Logarithmicæ RN quæ ſit 1; adeoque FG ꝏ $\frac{-x\,dx}{1-xx}$ ꝏ (per XXXVI) $-x\,dx$

$-x^3$

$-x^3 dx - x^5 dx - x^7 dx$ &c. Quare ſummando fient omnia FG, ſeu Log-us AR $\propto -\frac{xx}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^{10}}{10}$ &c. negativus ſcil. quia numerus ejus RE minor eſt unitate AB; at ſi fiat poſitivus $\frac{xx}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8}$ &c. hoc eſt, ſi AR transferatur ex altera parte in Aϱ, erit is propriè Logarithmus rectæ $\varrho\iota$, id eſt (ex natura Log-orum) tertiæ proportionalis ad ipſum ſinum RE & radium AB; qui tamen Log-us immediatè quoque reperiri potuiſſet ex valore numeri ſui $\varrho\iota \propto \frac{1}{\sqrt{1-xx}}$.

Idem etiam D. Leibnitius Act. Lipſ. 1691. p. 180. eleganter hoc modo:

$$\left.\begin{aligned} \text{Log.}\,\overline{1-x} &\propto -y \propto -x - \frac{xx}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\ \&c. \\ \text{Log.}\,\overline{1+x} &\propto +y \propto +x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\ \&c. \end{aligned}\right\}\ \text{per præc.}$$

$$\text{Log.}\,\overline{1-xx} \propto (\text{ex nat. log.})$$

$$\text{Log.}\,\overline{1-x} + \text{log.}\,\overline{1+x} \propto -xx \quad - \frac{x^4}{2} \quad - \frac{x^6}{3}\ \&c.$$

$$\text{Log.}\sqrt{1-xx} \propto \tfrac{1}{2}\text{log.}\,\overline{1-xx} \propto -\frac{xx}{2} \quad - \frac{x^4}{4} \quad - \frac{x^6}{6}\ \&c.$$

Coroll. Poſito ſinu complementi HI *hujus fig.* $\propto$ BI vel Bι *fig.* 1. æquabitur ▭lum ſub Logarithmo ſinus recti AR & radio AB dimidio exceſſui, quo ſpatium hyperbolicum CBIO ſuperat alterum CBιo. Patet ex Cor. 1. XLII, ubi CBIO − CBιo ſerie præſentis dupla expreſſum legitur. Cæterùm moneri potuiſſet ibi, quod ſumta z tertia proportionali ad 1 & x, ſeu poſita $z \propto xx$, ſeries illa convertatur in aliam $z + \frac{zz}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}$ &c. qua quoque ſpatium hyperbolicum, putà CBGM, exiſtente BG $\propto z$ vel xx, innuitur. Hinc enim patet, quòd CBIO − CB$\iota o \propto$ CBGM; & CBIO − CBGM ſeu MGIO $\propto$ CBιo; adeoque (cum his poſitis AI, $1-x$ ſit ad AG, $1-xx$, ſicut AB, 1 ad Aι, $1+x$) quòd ſumtis AI, AG, AB, Aι utcunque proportionalibus ſpatia ſegmentis IG, Bι inſiſtentia ſemper futura ſunt æqualia.

XLIX. *Applicatam Curvæ Catenariæ exhibere per ſeriem.* Fig. 6.

Eſto Curva $\mu B \lambda$, quam Catena ab extremitatibus ſuis liberè ſuſpenſa proprio pondere format, dicta *Catenaria*; cujus centrum A, vertex B, axis ABD, parameter AB ∞ 1, abſciſſa Aι ∞ z, & applicata $\iota\lambda$ vel $\iota\mu$ ∞ y. Conſtat ex iis, quæ Act. Lipſ. 1691. p. 274. &c. hac de Curva memoriæ prodita leguntur, elementum applicatæ dy eſſe $\infty \frac{dz}{\sqrt{zz-1}}$. Hinc ad tollendam ſurditatem pono $\sqrt{zz-1} \infty t-z$; unde fit $z \infty \frac{tt+1}{2t}$, $dz \infty \frac{tt-1}{2tt} dt$, $\sqrt{zz-1} \infty t-z \infty \frac{tt-1}{2t}$, ac denique $\frac{dz}{\sqrt{zz-1}}$ $(dy) \infty \frac{dt}{t}$. Quam porrò fractionem ut in ſeriem convertam, facio denominatorem binembrem, ſubſtituendo $1+x$ loco t, & dx loco dt; eritque $\frac{dt}{t}$ ſeu $dy \infty \frac{dx}{1+x} \infty$ (per XXXVII) $dx - xdx + xxdx - x^3dx + x^4dx$ &c. unde omnia dy ſeu $y \infty x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c. Quoniam autem $z \infty \frac{tt+1}{2t}$, hoc eſt, $tt \infty 2zt-1$, & t ſeu $1+x \infty z+\sqrt{zz-1}$, prodibit $x \infty z-1+\sqrt{zz-1} \infty$ (facta $\iota D \infty \sqrt{zz-1}$) $B\iota + \iota D \infty BD$; igitur data A$\iota$, z dabitur BD, x, indeque $\iota\lambda$ ſeu y per ſeriem.

Coroll. Ex ſerie inventa collata cum Prop. XLVII. liquet, y eſſe Logarithmum numeri x; unde data Logarithmica κBC cujus ſubtangens ∞ AB ∞ 1, puncta Catenariæ reperire proclive. Cùm enim z, hoc eſt, Aι vel $\sigma\lambda$ ($S\mu$) $\infty \frac{tt+1}{2t} \infty \frac{1}{2}t + \frac{1}{2t}$, patet, abſciſſis hinc inde Logarithmis æqualibus Aσ (AS) ordinatam Catenariæ $\sigma\lambda$ ($S\mu$) ſemiſſem eſſe oportere ſummæ duarum ab AB æquidiſtantium ordinatarum Logarithmicæ $\sigma\kappa$ & SC, quarum illa ∞ AD ∞t, hæc ex natura Log. $\infty \frac{1}{t}$. Atque in hoc ipſo conſiſtit elegantiſſima hujus Curvæ conſtructio Leibnitiana, quam videſis in Act. Lipſ. 1691. p. 277. ſeqq.

L. Datis

L. *Datis latitudine loci alicujus in Curva Loxodromica & angulo Rumbi cum meridiano, exhibere longitudinem loci per ſeriem.* Fig. 3.

Lineam Rumbicam ſeu Loxodromicam vocant Nautæ, quam navis ſecundùm eundem venti Rumbum conſtanter incedens in ſuperficie globi terr-aquei deſcribit; adeoque curva eſt, quæ omnes meridianos eodem angulo obliquo interſecat. Incipit hæc in Æquatore, indeque verſus alterutrum polorum obliquè recedendo, tandem in ipſum polum, quem infinitis gyris ambit, deſinit. Sumto in fig. 3. ſinus totus, idemque & radius Æquatoris, AC ∞ 1, BCD meridianus, B & D poli, tangens anguli Rumbici $\infty\, t$, H punctum in Loxodromica, ejus latitudo HC, ſinus latitudinis AE, & ſinus complementi HE qui vocetur z, longitudo verò ſeu arcus æquatoris inter meridianum loci H & principium Loxodromicæ interceptus dicatur x. His poſitis, per illa quæ in Act. Lipſ. 1691. p. 284. oſtenſa ſunt, invenitur elementum longitudinis $dx \infty \frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}$: ad cujus tentandam reductionem pono primò $z \infty \frac{1}{p}$; unde fit $dz \infty \frac{-dp}{pp}$, $\frac{dz}{z} \infty \frac{-dp}{p}$, $\sqrt{1-zz} \infty \frac{\sqrt{pp-1}}{p}$, & denique $\frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}\ (dx) \infty \frac{tdp}{\sqrt{pp-1}}$; porrò quidem memini, ejusdem formæ fuiſſe elementum Catenariæ in præc. pergo ponere ſicut ibi, $\sqrt{pp-1} \infty p-q$, indeque elicio $\frac{tdp}{\sqrt{pp-1}}\ (dx) \infty \frac{-tdq}{q}$, ac rurſum ſtatuendo $q \infty 1-r$ tandem obtineo $\frac{-tdq}{q}\ (dx) \infty \frac{tdr}{1-r}$; quæ quidem quantitas etiam immediatè elici potuiſſet ex quantitate $\frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}$ ſi ſtatim feciſſem $z \infty \frac{2-2r}{2-2r+rr}$: at in tales hypotheſes incidere ſæpenumerò difficile eſt, niſi jam uſu compertum habeatur, quæ formulæ in quas transformari poſſint. Nota, $r \infty$ AC $-$ BI, exceſſui nempe radii ſuprà tangentem ſemiſſis complementi latitudinis puncti H; etenim ſuppoſita BI $\infty 1-r$, ductaque recta BH, cum ſimilia ſint triangula HEB, ABI, erit HE, z, ad EB, $1-\sqrt{1-zz}$, ut AB, 1, ad BI, $1-r$, unde

reſultat $z \infty \frac{2-2r}{2-2r+rr}$, ut oportet. Converſa autem per XXXVI. Inventa quantitate $\frac{tdr}{1-r}$ in ſeriem, habetur $dx \infty tdr + trdr + trrdr + tr^3dr$ &c. & facta ſummatione $x \infty tr + \frac{trr}{2} + \frac{tr^3}{3} + \frac{tr^4}{4}$ &c. Patet igitur, quomodo ex data tangente ſemiſſis complementi latitudinis inveniatur longitudo.

Sciendum autem, elementum longitudinis $\frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}$ adhuc aliter poſſe reduci, ſtatuendo nempe $\sqrt{1-zz} \infty y$; hinc enim fit $z \infty \sqrt{1-yy}$, $dz \infty \frac{-ydy}{\sqrt{1-yy}}$, & $\frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}$ $(dx) \infty \frac{tdy}{1-yy} \infty$ (per XXXVI) $tdy + tyydy + ty^4dy + ty^6dy$ &c. ac deniq; omnia dx ſeu $x \infty ty + \frac{ty^3}{3} + \frac{ty^5}{5} + \frac{ty^7}{7}$ &c. ubi perſpicuum eſt, y ſeu $\sqrt{1-zz} \infty$ AE ſinui recto arcus HC; unde conſtat ratio definiendi etiam quæſitum ex ſinu recto latitudinis, quemadmodum fecit Dn. Leibnitius Act. Lipſ. 1691. p. 181. Et patet, ſi in calculo, per quem ad initio memoratam æquationem $dx \infty \frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}$ perveni, loco quantitatis indeterminatæ ipſum ſiuum rectum AE præ ſinu complementi HE ſelegiſſem, me ſtatim ad alteram æquationem immediatè in ſeriem convertibilem $dx \infty \frac{tdy}{1-yy}$ perventurum fuiſſe. Cæterum ex eo, quod duæ inventæ ſeries eandem quantitatem x denotant, obiter concludimus, quòd ſi in circulo ſinus cujuslibet arcus AE dicatur y, & AC — BI exceſſus radii ſuprà tangentem ſemiſſis complementi vocetur r, perpetuò futurum ſit $y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}$ &c. $\infty\ r + \frac{rr}{2} + \frac{r^3}{3}$ &c. Notamus etiam, ſi locus H ſit in ipſo polo, quo caſu $r \infty 1 \infty y$, fore $x \infty t + \frac{t}{2} + \frac{t}{3} + \frac{t}{4}$ &c. vel $\infty\ t + \frac{t}{3} + \frac{t}{5}$ &c. quarum ſerierum ſummæ cum ſint infinitæ per XVI, docent longitudinem loci H quoque infinitam eſſe, adeoque, quod dixi, curvam loxodromicam infinitis polum gyris ambire, priusquam in ipſum incidat.

Coroll.

Coroll. 1. Si in eadem Loxodromica præter locum H alius ſit locus notæ latitudinis, cujus ſinus rectus $\infty\ v$, & exceſſus radii ſuprà tangentem ſemiſſis complementi $\infty\ s$, erit ſimiliter ejus longitudo $\infty\ t$ in $v + \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5}$ &c. vel $\infty\ t$ in $s + \frac{ss}{2} + \frac{s^3}{3}$ &c. adeoque differentia longitudinum utriusque loci erit utriusque ſeriei differentia, np. t in $\frac{y = v}{1} + \frac{y^3 = v^3}{3} + \frac{y^5 = v^5}{5}$ &c. vel, t in $\frac{r = s}{1} + \frac{r^2 = s^2}{2} + \frac{r^3 = s^3}{3}$ &c. Hinc ſi in alia quadam Loxodromica duo concipiantur loca latitudine cum prioribus convenientia, erunt, manentibus y & v, vel r & s iisdem, differentiæ longitudinum ut tangentes angulorum, quos Rumbi faciunt ad meridianos. Vid. Act. Lipſ. 1691. p. 182. & 285.

Coroll. 2. Ex collatione harum ſerierum cum ſeriebus Propp. XLII. XLVI. & XLVII. liquet Problematis convenientia cum quadratura Hyperbolæ & Logarithmis. Speciatim notamus, quòd exiſtente ſubtangente Logarithmicæ $\infty\ t$, quæſita longitudo puncti H ſit ipſe Logarithmus rectæ $1 - r$ ſeu BI, ut patet ex XLVII; vel etiam (cum D. Leibnitio loc. cit.) ſemiſſis Log-i quantitatis $\frac{1+y}{1-y}$ ſeu $\frac{DE}{EB}$, quod ſic oſtenditur:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Log.}\ \overline{1+y}\ \infty + ty - \frac{tyy}{2} + \frac{ty^3}{3} - \frac{ty^4}{4} + \frac{ty^5}{5} - \frac{ty^6}{6}\ \text{\&c.} \\ \text{Log.}\ \overline{1-y}\ \infty - ty - \frac{tyy}{2} - \frac{ty^3}{3} - \frac{ty^4}{4} - \frac{ty^5}{5} - \frac{ty^6}{6}\ \text{\&c.} \end{array}\right\} \text{per XLVII.}$$

$$\text{Log.}\ \frac{1+y}{1-y}\ \infty$$

$$\text{Log.}\ \overline{1+y} - \text{log.}\ \overline{1-y}\ \infty\ 2ty + \frac{2ty^3}{3} + \frac{2ty^5}{5}\ \text{\&c.}$$

Coroll. 3. Data longitudine & latitudine loci, dabitur angulus Rumbi cum meridiano; cum enim $x \infty t$ in $r + \frac{rr}{2} + \frac{r^3}{3}$ &c. $\infty\ t$ in $y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}$ &c. erit $t.\ 1 :: x.\ r + \frac{rr}{2} + \frac{r^3}{3}$ &c. vel $y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}$ &c.

&c. id eſt, tangens anguli quæſiti ad ſinum totum, ut arcus longitudinis ad Log-um BI, vel ſemiſſem Log-i $\frac{DE}{EB}$; adeoque per Coroll. 1. hujus, ut differentia duarum longitudinum ad differentiam duorum Log-orum BI, vel ſemi-differentiam duorum $\frac{DE}{EB}$. Intellige hic Logarithmos acceptos in Curva, cujus ſubtangens ∞ radio ∞ 1. Nota, ſi deſideretur angulus Loxodromicæ, quæ non niſi poſt unam pluresve integras revolutiones in datum locum perducat, augendus eſt arcus differentiæ longitudinum integra peripheria æquatoris ejusve multiplo.

Schol. Ex hactenus dictis expeditus habetur modus conſtruendi *Scalam* quandam *Loxodromicam:* Eſto in Fig. 6. BMσ circumferentia æquatoris in gradus ſuos & graduum minutias diviſa; hæc extendatur in rectam AS axem Logarithmicæ CB$\varkappa$, ejusque diviſionibus ordine ab A adſcribantur gradus longitudinum; tum ſumto indefinitè in circumferentia hac puncto M, biſectoque arcu Mσ per rectam AT occurrentem tangenti $\sigma\varkappa$ in T, ducatur ex T recta TE axi AS parallela, ſecans Logarithmicam in E; ac denique ex E demittatur in axem perpendicularis ER; punctoque R adſcribatur numerus graduum in arcu BM: ſic habebuntur etiam gradus latitudinum; parataque erit Scala Loxodromica, quæ primario inſerviet Rumbo, cujus anguli tangens æquatur ſub tangenti Logarithmicæ. Numeri enim graduum cujusvis datæ latitudinis in ſcala ſtatim à latere aſpectui offerunt reſpondentes longitudinis gradus. Eadem tamen etiam cuilibet Rumbo prodeſſe poterit, ſi fiat per Coroll. 1. hujus, ut ſubtangens Logarithmicæ, è qua ſcala conſtructa eſt, ad anguli Rumbici tangentem, ſic longitudo vel differentia longitudinum per ſcalam inventa ad longitudinem vel differentiam longitudinum quæſitam: adeo ut ſcala ejusmodi in uſum nautarum circino proportionis inſculpta, & lineæ partium æqualium, quæ longitudinum gradus repræſentarent, juxta poſita inſtrumentum foret omnium forſan, quæ Naturæ hactenus tractarunt, compendioſiſſimum & utiliſſimum. Sed de his ſatis.

Antequam

Antequam pergamus, Lector advertere poteſt, quòd hucuſque in differentialium ſummatione pro quovis elemento ſemper ejus integrale purum ſeu abſolutum ſubſtituimus, velut x *pro* dx, $\frac{xx}{2}$ *pro* xdx *&c. At ſcire ipſum volumus, hoc minimè eſſe perpetuum; quanquam enim una eademque quantitas* x *non niſi unum habeat differentiale* dx, *idem tamen differentiale* dx *infinita habet integralia, unum quidem purum* x, *reliqua admiſſione quantitatum conſtantium affecta* $x + a$, $x - b$ &c. *quorum in ſummationis negotio pro re nata nunc hoc nunc illud ſeligendum eſt, neque adeo ſine præſenti hallucinationis periculo indiſcriminatim ſemper purum adſumi poteſt. Reſtat itaque, ut ad vitandum ſcopulum, quem communem ferè eſſe video omnibus iis, qui calculum hunc incautius tractant, ſubjiciamus adhuc ejus rei exemplum in uno alterove Problemate, è cujus enodatione Lectori conſtare poſſit, undenam & quibus criteriis dignoſcatur, quid pro quovis ſemper elemento ſummando ſubſtitui conveniat.*

L I. *Exhibere longitudinem Curvæ Parabolicæ per ſeriem.* Fig. 4.

Fingamus BCD Curvam eſſe Parabolam, cujus vertex B, axis BG, latus rectum $\infty\, a$, abſciſſa BG $\infty\, x$, applicata GD $\infty\, y$, ipſa BCD curva $\infty\, s$; proinde elem. FG vel CH $\infty\, dx$, DH $\infty\, dy$, & CD $(\sqrt{dx^2 + dy^2})\ \infty\ ds$. Erit ex natura Curvæ $ax\ \infty\ yy$; hinc differentiando $adx\ \infty\ 2ydy$, quadrandoque $aadx^2$ $(aads^2 - aady^2)\ \infty\ 4yydy^2$, & facta transpoſitione $aads^2\ \infty\ aady^2 + 4yydy^2$, extractaque tandem radice $ads\ \infty\ dy\sqrt{aa + 4yy}$, quæ quantitas eſt, de qua ſummanda agitur. Ad ſurditatem primò eliminandam pono $\sqrt{aa + 4yy}\ \infty\ z - 2y$, fiet $aa\ \infty\ zz - 4zy$, & $y\ \infty\ \frac{zz - aa}{4z}$; hinc $dy\ \infty\ \frac{zz + aa}{4zz}dz$, nec non $\sqrt{aa + 4yy}$ $(z - 2y)\ \infty\ \frac{zz + aa}{2z}$, adeoque $dy\sqrt{aa + 4yy}$ $(ads)\ \infty\ \frac{z^4 + 2aazz + a^4}{8z^3}dz\ \infty$ (membris ſeparatim poſitis) $\frac{zdz}{8} + \frac{aadz}{4z} + \frac{a^4dz}{8z^3}$, de quorum nunc ſummis diſpiciendum. Hunc in finem conſidero relationem, quam habet aſſumta litera indeterminata z ad ordinatas Curvæ noſtræ, eamque ex facta hyp. $\sqrt{aa + 4yy}\ \infty\ z - 2y$ cognoſco talem eſſe, ut exiſtente $y\ \infty\ 0$, z non pariter evaneſcat, ſed

 ſit

ſit ∞a, & quod creſcente y eò fortius creſcere debeat z; quapropter extenſa concipiatur ipſa z in recta DB fig. 3. à puncto D, & ſit prima DA, quæ naſcenti y reſpondet, ∞a, ultimaque z, quæ reſpondet ultimæ y ſeu applicatæ GD fig. 4. eſto DE. Tum fluere intelligatur ab A ad E indefinita recta AK vel EH, æqualis ubique $\frac{zz}{16}$ (integrali ſcil. puro primi membri $\frac{zdz}{8}$) minimaque adeo in A & $\infty \frac{aa}{16}$; ſic ipſum fluentis lineæ incrementum fiet $\frac{zdz}{8}$, & omnia incrementa quæ capit linea, dum ex A movetur in E, repræſentabunt omnia $\frac{zdz}{8}$, quæ ordinatis y à minima (o) ad ultimam (GD) ordine reſpondent, h. e. quæ pertinent ad Curvæ Parabolicæ portionem rectificandam BD (fig. 4.) Conſtituunt autem omnia illa incrementa, ut liquet, non integram EH ($\frac{zz}{16}$) ſed exceſſum tantum ejus ſuprà rectam AK ($\frac{aa}{16}$) hoc eſt, EH — AK ſeu $\frac{zz-aa}{16}$. Integrale igitur primi membri $\frac{zdz}{8}$, quod huc quadrat, eſt $\frac{zz-aa}{16}$. Similiter pro integrando tertio membro $\frac{a^4dz}{8z^3}$, fingo z extendi in recta AD fig. 1. à puncto A, primamque quæ naſcenti y reſpondet eſſe AB ∞a, & quæ reſpondet ultimæ, AD; hinc fluere concipio à B verſus D quantitatem $\frac{a^4}{16zz}$, ceu integrale purum ipſius $\frac{a^4dz}{8z^3}$, putà rectam BC vel DQ, quæ proin maxima erit in B & $\infty \frac{aa}{16}$, indeque verſus D decreſcet; decrementa itaque, quæ patitur linea BC quouſque pervenit in DQ, denotabunt omnia elementa $\frac{a^4dz}{8z^3}$, quæ portioni Curvæ Parabolicæ BD (fig. 4.) reſpondent: ſed omnia illa decrementa, ut apparet, non efficiunt rectam DQ ſeu $\frac{a^4}{16zz}$, verum potius BC — DQ ſeu $\frac{aa}{16} - \frac{a^4}{16zz}$; quapropter integrale tertii membri $\frac{a^4dz}{8z^3}$ huc pertinens

∞aa

$= \frac{aa}{16} - \frac{a^4}{16zz}$, ſummaque adeo primi & tertii $(S\frac{zdz}{8} + S\frac{a^4dz}{8z^3})$ $= \frac{zz-aa}{16} + \frac{aa}{16} - \frac{a^4}{16zz} = \frac{z^4-a^4}{16zz}$.

Reſtat intermedium adhuc membrum expediendum $\frac{aadz}{4z}$. Hoc cum abſolutè ſummari nequeat, in ſeriem converto, ponendo prius $z = a + t$, ut denominator fiat bimembris; hinc enim fit $\frac{aadz}{4z}$ $= \frac{aadt}{4a+4t} =$ (per XXXVII) $\frac{adt}{4} - \frac{tdt}{4} + \frac{ttdt}{4a} - \frac{t^3dt}{4aa}$ &c. & factâ ſummatione, $S\frac{aadz}{4z} = \frac{at}{4.1} - \frac{tt}{4.2} + \frac{t^3}{4.3a} - \frac{t^4}{4.4aa} + \frac{t^5}{4.5a^3}$ &c. Nota, quod hîc pro quolibet ſeriei termino ſubſtituam ejus integrale purum, quoniam ex æquatione $z = a + t$ colligo, quod exiſtente $z = a$ (hoc eſt $y = 0$) ipſa t, ut & quantitates fluentes omnes, $\frac{at}{4.1}$, $\frac{tt}{4.2}$, $\frac{t^3}{4.3a}$ &c. quoque ſint $= 0$, id eſt, quod hæ à o fluere ſeu incrementa ſumere occipiant; hinc enim manifeſtè liquet, omnia ipſarum crementa, nempe omnia $\frac{adt}{4}$, $\frac{tdt}{4}$ &c. ipſis quantitatibus ultimis $\frac{at}{4}$, $\frac{tt}{4.2}$ &c. æqualia fore. Quod idem quoque, ſi quis examinet, in omnibus præcedentium Propp. exemplis contingere obſervabit, indeque concludet, rectè à nobis factum, quod ibidem inter ſummandum pura ſemper integralia aſſumſerimus, tametſi ejus rei rationem diſertè non adjecerimus. Sed revertamur ad propoſitum: Inventa ſumma medii membri $\frac{aadz}{4z}$, ſi reliquorum ſummæ ſuprà repertæ adjiciantur, emergit ſumma omnium $S\frac{zdz}{8} + S\frac{aadz}{4z} + S\frac{a^4dz}{8z^3}$, hoc eſt, $as = \frac{z^4-a^4}{16zz} + \frac{at}{4.1} - \frac{tt}{4.2}$ $+ \frac{t^3}{4.3a} - \frac{t^4}{4.4aa}$ &c. & facta diviſione per a, longitudo Curvæ s ſeu BD $= \frac{z^4-a^4}{16azz} + \frac{t}{4.1} - \frac{tt}{4.2a} + \frac{t^3}{4.3aa} - \frac{t^4}{4.4a^3}$ &c. quæ denique poſita $a = t = 4$, & $z = a + t = 8$, fit $\frac{15}{16} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. unde cum ſit hoc caſu $y = \frac{zz-aa}{4z} = \frac{3}{2}$, & x

 $= yy$

$\infty \frac{yy}{a} \infty \frac{9}{16}$, ſequitur, quod exiſtente latere recto Parabolæ 4, & abſciſſa BC $\frac{9}{16}$, aut applicata GD $\frac{3}{2}$, longitudo Curvæ Parabolicæ BD æquetur $\frac{15}{16} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c.

Coroll. Ex ſerie collata cum XLII. Curvam Parabolicam cum Spatio Hyperbolico inter Aſymptotas comparandi modus innoteſcit. Sufficit monuiſſe.

LII. *Rectificare Curvam Logarithmicam per ſeriem & aliter.* Fig. 6.

Inſiſtat axi SA σ Curva Logarithmica CB $\varkappa$, cujus ordinata AB ∞ 1, ſubtangens AK $\infty\, b$, alia quævis applicata RE ($\varrho\epsilon$) $\infty\, z$, ejusque elementum EF ($\epsilon\varphi$) $\infty\, dz$; quæritur rectificatio portionis Curvæ BE (Bϵ). Quoniam per XLVII. elementum abſciſſæ AR (Aϱ) nempe FG ($\varphi\gamma$) $\infty \frac{bdz}{z}$, erit EG^2 (EF^2 + FG^2) $\infty\, dz^2 + \frac{bbdz^2}{zz} \infty \frac{zz+bb}{zz} dz^2$, indeque elementum curvæ EG ($\epsilon\gamma$) $\infty \frac{dz\sqrt{zz+bb}}{z} \infty$ (terminis fractionis per $\sqrt{zz+bb}$ æque-multiplicatis) $\frac{zzdz+bbdz}{z\sqrt{zz+bb}} \infty \frac{zdz}{\sqrt{zz+bb}} + \frac{bbdz}{z\sqrt{zz+bb}}$, de quorum ſummatione hîc quæritur. Prioris membri integrale purum eſt $\sqrt{zz+bb}$, quod (ob primam $z \infty$ AB ∞ 1) inde à $\sqrt{1+bb}$ decreſcere (creſcere) intelligitur ad uſque $\sqrt{zz+bb}$; adeo ut omnia ejus decrementa (incrementa) huc quadrantia, ſeu S $\frac{zdz}{\sqrt{zz+bb}}$ ſint $\infty \sqrt{1+bb} - \sqrt{zz+bb}$ ($\sqrt{zz+bb} - \sqrt{1+bb}$) hoc eſt, æqualia differentiæ duarum in B & E (ϵ) tangentium rectarum BK & EN ($\epsilon\nu$). Poſterioris membri $\frac{bbdz}{z\sqrt{zz+bb}}$ integrale, quoniam ita planum non eſt, prævia reductione inveſtigare conor, eaque ſimili huic, qua ſuprà Prop. L. pro Curva Loxodromica fui uſus, cum in elementis analogiam quandam obſervem. Pono itaque primò $z \infty \frac{bb}{p}$, eoque mediante transformo $\frac{bbdz}{z\sqrt{zz+bb}}$ in $\frac{-bdp}{\sqrt{bb+pp}}$; deinde facio $\sqrt{bb+pp} \infty p+q$, ſive $p \infty \frac{bb-qq}{2q}$; inde-

indeque elicio $\frac{-bdp}{\sqrt{bb+pp}}$ $\left(\frac{bbdz}{z\sqrt{zz+bb}}\right)$ ∞ $\frac{bdq}{q}$, quod per XLVII. elementum eſſe cognoſco abſciſſæ cujusdam in Logarithmica, quam tandem ita determino: Quoniam $p \infty \frac{bb-qq}{2q}$, & $z \infty \frac{bb}{p}$, fiet $z \infty \frac{2bbq}{bb-qq}$, ſicut viciſſim $q \infty \frac{-bb+b\sqrt{zz+bb}}{z}$; & quia prima $z \infty$ AB ∞ 1, erit quæ huic reſpondet prima $q \infty -bb+b\sqrt{1+bb}$. Pro conſtructione, abſcindo in tangente BK partem Kα ∞ KA, in ordinata AB partem BV ∞ Bα, & in V ſtatuo VX parallelam ipſi AK; pari modo in tangente $\nu\epsilon$ (idem imaginatione ſupple in NE) ſumo νr ∞ $\nu\epsilon$, hinc ϵv ∞ ϵr, & duco vx parallelam $\nu\epsilon$; quo pacto conſtat fore VX ∞ primæ $q \infty -bb+b\sqrt{1+bb}$, & vx ∞ ultimæ $q \infty \frac{-bb+b\sqrt{zz+bb}}{z}$. Quocirca ſi ambæ VX & vx, vel etiam loco harum ſola quarta proportionalis ad VX, vx & AB (quæ ſit SC vel $\sigma\varkappa$) applicetur Logarithmicæ, erit intercepta applicatis VX & vx axis portio, vel etiam ipſis AB, SC ($\sigma\varkappa$) interjecta portio AS (Aσ) [ex natura enim curvæ æqualis utrisque intercipietur] ∞ S$\frac{bdq}{q}$, id eſt, omnibus $\frac{bdq}{q}$, ſeu omnibus $\frac{bbdz}{z\sqrt{zz+bb}}$ pro portione curvæ BE (Bϵ) rectificanda inſervientibus. Et quoniam poſita differentia inter AB & SC ($\sigma\varkappa$) ∞x, reſegmentum axis AS (Aσ) $\infty bx \; 8 \; \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} \; 8$ $\frac{bbdz}{z\sqrt{zz+bb}}$ ſumma etiam per ſeriem reperta. Additis itaque amborum ſummis fient omnia EG ($\epsilon\gamma$) ſeu longitudo curvæ BE (Bϵ) $\infty \sqrt{1+bb} - \sqrt{zz+bb} + bx \; 8 \; \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} \; 8 \; \frac{bx^4}{4}$ &c. ∞ differentiæ tangentium BK & EN ($\epsilon\nu$) unà cum reſegmento axis AS (Aσ).

Cum non omnes quantitates ſurdæ, nedum tranſcendentes, differentialibus admixtæ præcedentibus modis in rationales transformari, inque ſeries converti poſſint, ad alia ſubinde nobis artificia recurrendum eſt ad obtinendum propoſitum, inter quæ ob univerſalitatem ſuam eminent Interpola-

tiones Walliſianæ, *vel* Exaltatio binomii ad poteſtatem indefinitam, *vel* Aſſumtio ſeriei fictæ inſtar quæſitæ, *aut conſimilia ſubſidia alia, quorum pro re nata nunc unum nunc plura in uſum verti queunt. Nos pauca eorum ſpecimina poſt generalia nonnulla in uno alterove exemplo ſubjungemus.*

LIII. *Quantitatem quamcunque ſurdam vel irrationalem in ſeriem infinitam rationalium convertere per interpolationes Walliſianas.*

Reducatur quantitas rationalis, cujus poteſtas fracta ſive radix aut latus quæritur, ad fractionem hujus formæ $\frac{l}{m-n}$ (ponendo $m < n$). Hujus fractionis poteſtates integræ, prima, ſecunda, tertia, &c. convertantur ope diviſionis continuæ in totidem ſeries, per XXXVI. uſque ad XL. Propp. hoc pacto:

Exp.	*Poteſt.*
0	$1 \infty 1 + 0 + 0 + 0 + 0$ &c.
1	$\frac{l}{m-n} \infty \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m3} + \frac{ln3}{m4} + \frac{ln4}{m5}$ &c.
2	$\frac{ll}{Q:m-n} \infty \frac{ll}{mm} + \frac{2lln}{m3} + \frac{3llnn}{m4} + \frac{4lln3}{m5} + \frac{5lln4}{m6}$ &c.
3	$\frac{l3}{C:m-n} \infty \frac{l3}{m3} + \frac{3l3n}{m4} + \frac{6l3nn}{m5} + \frac{10l3n3}{m6} + \frac{15l3n4}{m7}$ &c.
4	$\frac{l4}{Bq:m-n} \infty \frac{l4}{m4} + \frac{4l4n}{m5} + \frac{10l4nn}{m6} + \frac{20l4n3}{m7} + \frac{35l4n4}{m8}$ &c.

In his ſeriebus obſervabis, coëfficientes primorum terminorum conſtituere unitates, coëfficientes ſecundorum numeros laterales, tertiorum trigonales, quartorum pyramidales, & ſic porrò; terminos verò puros ordine oriri ex ductu fractionis $\frac{l}{m}$ (ad poteſtatem elevatæ ſimilem ei ad quam elevanda fractio $\frac{l}{m-n}$) in $1, \frac{n}{m}, \frac{nn}{mm}, \frac{n3}{m3}$, &c. Hinc ad inveniendas poteſtates intermedias ſive radices (ceu media quædam geometrica, quorum exponentes ſunt arithmeticè medii inter exponentes integrorum) numeri terminorum figurati tantum ſunt interpolandi juxta doctrinam Walliſii

Prop.

Prop. 172. ſeqq. Arithm. Infin. Eſt vero, poſito exponente vel indice poteſtatis p, generalis character lateralium quoque p, trigonalium $\frac{p.\overline{p+1}}{1.2}$, pyramidalium $\frac{p.\overline{p+1}.\overline{p+2}}{1.2.3}$, &c. ut ibid. docetur Prop. 182. Quare ſi p interpreteris per $\frac{1}{2}$, invenies poteſtatem dimidiam quantitatis $\frac{l}{m-n}$, nempe $\sqrt{\frac{l}{m-n}}$ ꝏ $\sqrt{\frac{l}{m}}$ in $\overline{1+\frac{1n}{2m}+\frac{1.3nn}{2.4mm}+\frac{1.3.5n^3}{2.4.6m^3}+\frac{1.3.5.7n^4}{2.4.6.8m^4}+}$ &c. ſi p explices per $\frac{1}{3}$, habebis trientem poteſtatis ſeu $\sqrt{C.\frac{l}{m-n}}$ ꝏ $\sqrt{C.\frac{l}{m}}$ in $\overline{1+\frac{1n}{3m}+\frac{1.4nn}{3.6mm}+\frac{1.4.7n^3}{3.6.9m^3}+\frac{1.4.7.10n^4}{3.6.9.12m^4}+}$ &c. ſi per $\frac{3}{2}$, obtinebis ſeſquialteram poteſtatem ſeu $\frac{l}{m-n}\sqrt{\frac{l}{m-n}}$ ꝏ $\frac{l}{m}\sqrt{\frac{l}{m}}$ in $\overline{1+\frac{3n}{2m}+\frac{3.5nn}{2.4mm}+\frac{3.5.7n^3}{2.4.6m^3}+\frac{3.5.7.9n^4}{2.4.6.8m^4}+}$ &c. &c.

Coroll. Quoniam poſitis l, m & n æqualibus inter ſe, fit quantitas $\frac{l}{m-n}$ ꝏ $\frac{l}{0}$ ꝏ ∞, ſeries autem prædictæ abeunt in ſeries purorum coëfficientium $1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}$ &c. $1+\frac{1}{3}+\frac{1.4}{3.6}+\frac{1.4.7}{3.6.9}$ &c. $1+\frac{3}{2}+\frac{3.5}{2.4}+\frac{3.5.7}{2.4.6}$ &c. colligimus, ſeries ejuſmodi natas ex ductu continuo fractionum, quarum numeratores & denominatores in progreſſ. arithm. per differentias primo denominatori æquales inſurgunt, ſummas fundere infinitas; quod apertius ita conſtabit: Minue numeratores, eosque æquales conſtitue denominatoribus ſingulos ſingulis, nempe ſecundum numeratorem primo denominatori, tertium ſecundo, 4tum 3tio, & ita deinceps; ſic enim ex. gr. loco primæ ſeriei habebis $1+\frac{1}{2}+\frac{1.2}{2.4}+\frac{1.2.4}{2.4.6}+\frac{1.2.4.6}{2.4.6.8}$ &c. ꝏ (perimentibus ſe mutuo dictis numeris) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ &c. ꝏ ∞, per Cor. 2. XVI, unde fortius altera $1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}$ &c. ob numeratores majores infinita erit. Cæterùm poſtremus terminus cujusque ſeriei nunc nullus eſt nunc infinitus, prout exponens poteſtatis p, vel prima ſeriei fractio, unitate minor eſt majorve: Sic

ultimus

ultimus terminus primæ ſeriei $\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$ &c. nullus eſt; nam ſi quantus eſſet, etiam hic foret quantus $\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}$ &c. utpote cujus ſinguli factores ſingulis factoribus præcedentis termini ordine ſumtis ſunt majores; quare & utriusque productum quantum foret, np. $\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$ in $\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}$ &c. ꝏ (permiſtis alternatim utriusque factoribus) $\frac{1.2.3.4.5 \ldots \infty - 1}{2.3.4.5.6 \ldots \infty}$ ꝏ (ob numeratores omnes primum ſequentes, & denominatores ultimum præcedentes ſe mutuò perimentes) $\frac{1}{\infty}$ ꝏ o, quod abſurdum. Ultimus contra terminus tertiæ ſeriei $\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}$ &c. infinitus eſt; nam ſi finitus eſſet, etiam hic foret finitus $\frac{4.6.8.10}{3.5.7.9}$ &c. utpote cujus ſinguli factores ſingulis illius ſunt minores; quocirca & utriusque productum finitum foret, nempe $\frac{3.5.7}{2.4.6}$ &c. in $\frac{4.6.8}{3.5.7}$ &c. ꝏ $\frac{3.4.5.6 \ldots \infty}{2.3.4.5 \ldots \infty - 1}$ ꝏ (deſtruentibus ſe mutuo numeratoribus qui ultimum præcedunt, & denominatoribus qui primum ſequuntur) $\frac{\infty}{2}$ ꝏ ∞, quod pariter abſurdum.

LIV. *Idem præſtare per exaltationem binomii ad poteſtatem indefinitam.*

Quantitas rationalis, cujus poteſtas per ſeriem deſideratur, ſit expreſſa per binomium $1+n$ (ponendo $1 > n$). Hujus binomii poteſtas indefinita p, ut jam paſſim inter Geometras notum, per ſeriem exprimitur $1 + \frac{p}{1} n + \frac{p \cdot p-1}{1.2} nn + \frac{p.p-1.p-2}{1.2.3} n^3 + \frac{p.p-1.p-2.p-3}{1.2.3.4} n^4$ + &c. ubi perſpicuum eſt, quod quotiescunque exponens poteſtatis p eſt numerus integer & poſitivus, ſeries neceſſariò aliquando abrumpetur; quandoquidem in continuatione ulteriori coëfficientium $p.p-1.p-2.$ &c. neceſſariò tandem devenietur ad $p-p$ ꝏ o; quod proin illum terminum & ab illo deinceps omnes evaneſcere facit. Sed quoties p numerus fractus eſt aut negativus, coëfficientes nunquam in nihilum abibunt, ac ideò ſeries in infinitum excurret: qua ratione habetur ex. gr. $\sqrt{1+n}$ (ubi p valet $\frac{1}{2}$) ꝏ

$1 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2.4}nn + \frac{1.3}{2.4.6}n^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}n^4 +$ &c. & $\sqrt{C. 1+n}$ (ubi p valet $\frac{1}{3}$) $\infty\ 1 + \frac{1}{3}n - \frac{2}{3.6}nn + \frac{2.5}{3.6.9}n^3 - \frac{2.5.8}{3.6.9.12}n^4$ &c. & $\frac{1}{\sqrt{1+n}}$ (ubi p notat $-\frac{1}{2}$) $\infty\ 1 - \frac{1}{2}n + \frac{1.3}{2.4}nn - \frac{1.3.5}{2.4.6}n^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}n^4 -$ &c. & pariter in cæteris.

Nota, quòd exaltatio binomii ad poteſtatem indefinitam & interpolationis negotium reepſe in idem recidunt, unoque & eodem nituntur fundamento, quod conſiſtit in proprietate quadam numerorum figuratorum ſupra jam prælibata Propoſ. XIX. ſed cujus demonſtrationem, ne hîc nimii ſimus, in aliam occaſionem reſervamus.

L V. *Duarum quantitatum indeterminatarum relationem unius ad alteram per ſeriem exprimere, ope aſſumtæ ſeriei fictæ inſtar quæſitæ.*

Ponatur alterutra indeterminatarum x & y, quarum relatio ad ſe invicem quæritur, putà y, æquari ſeriei $a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$, &c. aut $a + bxx + cx^4 + ex^6$, &c. aut $a + bx^4 + cx^8 + ex^{12}$, &c. aut ſimili, prout opùs videbitur; atque tum in quantitate vel æquatione propoſita loco y ſubſtituatur hæc ſeries, nec non loco dy & ddy, &c. ſeriei differentiale aut differentio-differentiale, &c. quo facto ex comparatione homologorum terminorum determinari poterunt aſſumti coëfficientes a, b, c, &c. Sequuntur Exempla:

L VI. *Invenire relationem coordinatarum Curvæ Elaſticæ per ſeriem.* Fig. 7.

Flectatur Elater in curvaturam AQR à potentia applicata in A, & trahente juxta directionem AZ; ſitque AB vel $RZ \infty a$, AE vel $PQ \infty x$, AP vel $EQ \infty y$, & $AQ \infty z$; oſtenſum eſt in Act. Lipſ. 1694. p. 272. & 1695. p. 538. naturam hujus curvæ exprimi æquatione $dy \infty \frac{xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$, è qua qui methodo Diophanti, qua in præced. part. uſi fuimus, irrationalitatem tollere vellet, ætatem conſumeret; cum deprehenſum ſit à Geometris, ſummam vel differentiam duorum biquadratorum, qualis eſt $a^4 - x^4$, nunquam poſſe conſtituere quadratum:

dratum : Quare nobis confugiendum eſt vel ad Interpolationes, vel ad indefinitam Potentiam binomii, hoc pacto :

1. *Mod.* Interpretemur x^4 tam per l, quàm per n, & a^4 per m; erit $\frac{x^4}{a^4-x^4} \infty \frac{l}{m-n}$; unde per LIII habetur $\sqrt{\frac{l}{m-n}}$, id eſt, $\sqrt{\frac{x^4}{a^4-x^4}}$ aut $\frac{xx}{\sqrt{a^4-x^4}} \infty \frac{xx}{aa} + \frac{1x^6}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}}{2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{14}}{2.4.6a^{14}} +$ &c. & (facta multiplicatione per dx) $\frac{xxdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ ſeu $dy \infty \frac{xxdx}{aa} + \frac{1x^6dx}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}dx}{2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{14}dx}{2.4.6a^{14}}$ &c. & denique ſummando, AP ſeu $y \infty \frac{x^3}{3aa} + \frac{1x^7}{[illegible]7a^6} + \frac{1.3x^{11}}{2.4.11a^{10}} + \frac{1.3.5x^{15}}{2.4.6.15a^{14}} +$ &c.

2. *Mod.* Explicemus nunc a per 1, & $-x^4$ per n; erit $a^4-x^4 \infty 1+n$, & $\frac{1}{\sqrt{a^4-x^4}} \infty \frac{1}{\sqrt{1+n}}$: unde per LIV. fit $\frac{1}{\sqrt{1+n}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{a^4-x^4}} \infty 1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1.3}{2.4}x^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{12} +$ &c. & (multiplicand. per $xxdx$) $\frac{xxdx}{\sqrt{a^4-x^4}} \infty xxdx + \frac{1}{2}x^6dx + \frac{1.3}{2.4}x^{18}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{14}dx +$ &c. & integrando, $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2.7}x^7 + \frac{1.3}{2.4.11}x^{11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15}x^{15} +$ &c. ſeu denique ſupplendo unitatem, $\frac{x^3}{3aa} + \frac{1x^7}{2.7a^6} + \frac{1.3x^{11}}{2.4.11a^{10}} + \frac{1.3.5x^{15}}{2.4.6.15a^{14}} +$ &c. ut anteà.

Coroll. Sumta $x \infty a \infty 1$, fit tota $AZ \infty \frac{1}{3} + \frac{1}{2.7} + \frac{1.3}{2.4.11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15} +$ &c. Conf. Act. Lipſ. 1694. p. 274. & 369.

LVII. *Rectificare eandem Curvam seriem.* Fig. 7.

Quia æquatio curvæ, ut dictum, eſt $dy \infty \frac{xxdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, fiet quadrando $dy^2 \infty \frac{x^4dx^2}{a^4-x^4}$ & $dz^2 \infty dy^2 + dx^2 \infty \frac{x^4dx^2}{a^4-x^4} + dx^2 \infty \frac{a^4dx^2}{a^4-x^4}$, adeoque $dz \infty \frac{aadx}{\sqrt{a^4-x^4}}$. Exponamus a^4 nunc per l, nunc per m, & x^4 per n, erit $\frac{aa}{\sqrt{a^4-x^4}}$ ſeu $\sqrt{\frac{a^4}{a^4-x^4}} \infty \sqrt{\frac{l}{m-n}}$; unde per

per LIII. fit $\sqrt{\frac{l}{m-n}}$ ſive $\sqrt{\frac{a4}{a4-x4}} \infty 1 + \frac{1x4}{2a4} + \frac{1.3x^8}{2.4a^8} + \frac{1.3.5x^{12}}{2.4.6a^{12}}$ + &c. & (multiplic. per dx) $\frac{aadx}{\sqrt{a4-x4}}$ ſeu $dz \infty dx + \frac{1x4dx}{2a4}$ $+ \frac{1.3x^8dx}{2.4a^8} + \frac{1.3.5x^{12}dx}{2.4.6a^{12}}$ + &c. tandemque ſummando, z ſive $AQ \infty x + \frac{1x5}{2.5a4} + \frac{1.3x9}{2.4.9a^8} + \frac{1.3.5x^{13}}{2.4.6.13a^{12}}$ + &c. Idem etiam per LIV. ſimili modo oſtendetur.

Coroll. Facta $x \infty a \infty 1$, habetur tota $AQR \infty 1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9}$ $+ \frac{1.3.5}{2.4.6.13}$ + &c. vid. Act. Lipſ. 1694. p. 274.

LVIII. *Definire limites præcedentium ſerierum.* Fig. 7.

Quoniam ſeries his methodis repertæ nimis lentè convergunt, non abs re erit, ſi modum oſtendam, quo levi labore ſummis earum, quantum ad uſum ſufficit, approximare & limites conſtituere poſſimus. In exemplum propoſitæ ſint proximæ duæ ſeries, quibus exprimitur applicata Elaſticæ BR vel AZ, & longitudo ipſius curvæ AR, nempe: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2.7} + \frac{1.3}{2.4.11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15}$ + &c. &, $1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13}$ + &c. Sumo quantitatem, cujus integrale haberi poſſit, datis $\frac{xxdx}{\sqrt{a4-x4}}$ & $\frac{aadx}{\sqrt{a4-x4}}$, è quibus ſeries propoſitæ fluxerunt, affinem, putà $\frac{x3dx}{\sqrt{a4-x4}}$, cujus integrale eſt $\frac{aa-\sqrt{a4-x4}}{2}$, eamque pari methodo in ſeriem reſolvo, & ſeriei terminis ſummatis pro x & a unitatem pono; quo pacto ſeries emerget: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2.8} + \frac{1.3}{2.4.12} + \frac{1.3.5}{2.4.6.16}$ + &c. æqualis proinde $\frac{aa-\sqrt{a4-x4}}{2} \infty \frac{1}{2}$ ſeu 0.5000000. Colligo jam ſingularum ſerierum terminos aliquot ab initio in unam ſummam (quod expeditè fit per Logarithmos) ex. gr. decem primos terminos, qui collecti efficiunt in prima ſerie 0, 5102560: in ſecunda ſerie 1, 2207187: in tertia 0, 4119014. Hujus igitur reliqui post

Pp 2 decimum

decimum termini (ad complendum $\frac{1}{2}$ ſeu o. 5000000) conſtituent o. 0880986, qui numerus additus ſummæ 10 primorum terminorum in pr. & ſec. ſerie exhibet o. 5983546 & 1. 3088173, ſummis totarum ſerierum juſto minores, ob ſingulos tertiæ ſeriei terminos minores homologis terminis reliquarum.

Deinde, quia undecimi termini in tribus iſtis ſeriebus ſunt $\frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19}{2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.43}$, $\frac{1.3.5\ldots\ldots19}{2.4.6\ldots20.41}$, $\frac{1.3.5\ldots\ldots19}{2.4.6\ldots20.44}$, liquet terminum hunc in ſerie tertia ad eundem in ſerie prima reciprocè eſſe ut 43 ad 44, & ad eundem in ſecunda ut 41 ad 44; terminorum verò ſequentium ſingulos in tertia ſerie ad ejusdem ordinis terminos in reliquis ſeriebus habere rationem majorem quàm 43 ad 44, & quàm 41 ad 44: unde & ſumma omnium ſequentium decimum in tertia ſerie ad ſummam omnium poſt decimum in reliquis ſeriebus majorem rationem habebit. Idcircò ſi fiat, ut 43 ad 44, nec non ut 41 ad 44, ita ſumma terminorum poſt decimum in tertia ſerie, nimirum o. 0880986, ad o. 0901474 & ad o. 0945448; erunt hi numeri majores ſummis terminorum decimum ſequentium in prima & ſecunda ſerie: quapropter ſi addantur ſummis 10 priorum, quæ ſunt o. 5102560 & 1. 2207187, erunt quoque numeri provenientes o. 6004034 & 1. 3152635 majores ſummis totarum ſerierum.

Reperti ergo ſunt limites, quibus ſummæ primæ & ſecundæ ſeriei definiuntur: limites illius ſunt o. 5983546 & o. 6004034; hujus 1. 3088173 & 1. 3152635: unde applicata *BR* vel *AZ* major eſt quàm o. 598, & minor quàm o. 601; ipſa verò curva *AR* $>$ 1. 308, & $<$ 1. 316, ſic ut tres iſtæ lineæ *RZ*, *AZ* & *AQR* proximè ſe habeant ut 10, 6, 13. Conf. Act. Lipſ. 1694. p. 274.

Schol. Quoniam ex natura deſcenſus gravium demonſtratur, quòd tempus deſcenſus penduli alicujus per quadrantem circuli ad tempus deſcenſus perpendicularis per ejus radium eam rationem habet, quam habet Curva Elaſtica *AR* ad ejus axem *RZ*, h. e. majorem, ut oſtendimus, quàm 1308 ad 1000, & minorem quàm 1316 ad 1000: tempus autem deſcenſus perpendicularis per circuli radium ad tempus per ſemiradium ſe habet, ut $\sqrt{2}$ ad 1: & tempus per ſemiradium

miradium ad tempus per arcum minimum (conſentiente Hugenio in Horol. Oſcillat. p. 155.) ut diameter circuli ad ejus ſemiperipheriam, h. e. ut 226 ad 355: inferri poteſt ex æquo, quòd tempus deſcenſus penduli per quadrantem integrum ad tempus deſcenſus ejus per arcum minimum ſe habet in ratione majore quàm 3400 ad 2888, & in minore quàm 3400 ad 2869; unde rationem 3400 ad 2900, ſive 34 ad 29, quam præfatus Auctor ibid. pag. 9. temporibus horum deſcenſuum aſſignat, extra hos limites cadere liquet.

LIX. *Dati Logarithmi Numerum invenire per ſeriem.* Fig. 1.

Intelligatur Curva Logarithmica *PCQ*, cujus axis *AD*, ſubtangens conſtans $\infty\, t$, applicata $BC \infty 1$, Logarithmus datus *BI* (*Bι*) $\infty\, x$, ejusque Numerus *IO* (*ιο*) $\infty\, y$; erit ex generali curvarum natura: $\pm\, dy . dx :: y . t$, adeoque $y \infty \pm \frac{t\,dy}{dx}$. Fiat juxta præſcriptum Prop. LV. $y \infty 1 + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ &c. & differentiando, $\frac{dy}{dx} \infty\, b + 2cx + 3exx + 4fx^3$ &c. eritque $1 + bx + cxx + ex^3 + fx^4$, &c. $(\infty\, y \infty \pm \frac{t\,dy}{dx}) \infty \pm bt \pm 2ctx \pm 3etxx \pm 4ftx^3 \pm 5gtx^4$, &c. & facta comparatione homologorum terminorum elicietur, $b \infty \pm \frac{1}{t}$, $c\, (\infty \pm \frac{b}{2t}) \infty \frac{1}{1.2.tt}$, $e\, (\infty \pm \frac{c}{3t}) \infty \pm \frac{1}{1.2.3t^3}$, $f\, (\infty \pm \frac{e}{4t}) \infty \frac{1}{1.2.3.4t^4}$, &c. unde valoribus iſtis coëfficientium b, c, e, &c. ſubſtitutis reſultat $y \infty 1 \pm \frac{x}{t} + \frac{xx}{1.2tt} \pm \frac{x^3}{1.2.3t^3} + \frac{x^4}{1.2.3.4t^4} \pm$ &c. Conf. Act. Lipſ. 1693. p. 179.

Aliter idem absque differentialium adminiculo: Concipiatur Log-us *BI* (*Bι*) diviſus in partes quotlibet æquales *BE*, *EF*, *FG*, &c. (*Bε*, *εφ*, *φγ*, &c.) quarum numerus ſit n, & ſingulæ dicantur d, ſic ut nd ſit ∞ *BI* (*Bι*) $\infty\, x$. Tum applicatis curvæ rectis totidem *EK*, *FL*, *GM*, &c. (*εκ*, *φλ*, *γμ*, &c.) jungantur extremitates *C* & *K* (*κ*) duarum *BC*, *EK* (*εκ*) per rectam *CK* (*Cκ*), ſitque axis portio inter productam *CK* (*Cκ*) & applicatam *BC* intercepta $\infty\, t$; quo pacto propter triangula ſimilia fiet $t . 1\,(BC) :: t \pm d . 1 \pm \frac{d}{t} \infty$ *EK* (*εκ*). Et

quoniam ob æquales BE, EF, FG, &c. ($B\varepsilon$, $\varepsilon\phi$, $\phi\gamma$, &c.) ipſæ BC, EK, FL, &c. (BC, $\varepsilon\kappa$, $\phi\lambda$, &c.) in continua ſunt proportione, earumque prima BC ∞ 1, idcircò deſignabit FL ($\phi\lambda$) ſecundam poteſtatem, GM ($\gamma\mu$) tertiam, RN ($\varrho\nu$) quartam, &c. tandemque ultima IO (ιo) ſeu y ipſam n poteſtatem applicatæ EK ($\varepsilon\kappa$) ſeu $1 \pm \frac{d}{t}$ (pro numero vid. particularum, in quas diviſa eſt BI ($B\iota$)); quæ quidem poteſtas per LIV. reperitur ∞ $1 \pm \frac{nd}{t} + \frac{n.n-1.dd}{1.2tt} \pm \frac{n.n-1.n-2d^3}{1.2.3t^3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.d^4}{1.2.3.4t^4}$ $\pm$ &c. Quòd ſi jam numerus particularum n ponatur infinitus, producta CK ($C\kappa$) abibit in tangentem, & ipſa t in ſubtangentem Logarithmicæ, atque præterea numeri 1, 2, 3, &c. evaneſcent præ n, ſic ut $n-1$, $n-2$, $n-3$, tantundem valeant ac n: quare tum fiet y ∞ $1 \pm \frac{nd}{t} + \frac{nndd}{1.2tt} \pm \frac{n^3d^3}{1.2.3t^3} + \frac{n^4d^4}{1.2.3.4t^4} \pm$ &c. ∞ (propter nd ∞ x) $1 \pm \frac{x}{t} + \frac{xx}{1.2tt} \pm \frac{x^3}{1.2.3t^3} + \frac{x^4}{1.2.3.4t^4} \pm$ &c. ut ſuprà.

Nota, quòd exiſtente $x > t$, termini quidem ſeriei aliquouſque creſcunt, tandem tamen decreſcere pedetentim occipiunt, ultimoque vergunt in nihilum. Nam ſumtis ab initio m terminis, erit ex lege progreſſionis ſumtorum ultimus $\frac{x^{m-1}}{1.2.3...m-1.t^{m-1}}$, & ſequens ultimum $\frac{x^m}{1.2.3...mt^m}$; adeoque ratio illius ad hunc, ut mt ad x: unde cum ratio t ad x determinata ſit, numerus verò terminorum m uſque & uſque major poſſit accipi, ratio quoque mt ad x tandem quavis data major fiet. Exiſtente autem x ∞ vel $< t$, ſeries iſta, & aliæ hujus generis, ſtatim ab initio celerrimè convergunt, eoque celeriùs quò minor x: unde diſcimus quod multo commodius & minori cum labore Logarithmorum Canon adornari poſſit, ſi per hanc Propoſ. ex Log-is datis Numeri, quàm ſi viciſſim per XLVII. ex Numeris datis Log-i quærantur. Quanquam & illic compendium ſeſe nobis offerat non contemnendum, quod quia in dicta Propoſ. intactum præteriit, breviter hîc indicandum reſtat: Quoniam poſitis in Logarithmica (Fig. 6.) AB

∞ a,

ꝏ a, ſubtang. AK ꝏ t, BI ꝏ u, & $B\epsilon$ ꝏ s, adeoque RE ꝏ $a-u$, & $\varrho\epsilon$ ꝏ $a+s$, invenitur per XLVII, AR (Log-us RE) ꝏ t in $\overline{\frac{u}{a}+\frac{uu}{2aa}+\frac{u^3}{3a^3}+\frac{u^4}{4a^4}+\&c.}$ & $A\varrho$ (Log-us $\varrho\epsilon$) ꝏ t in $\overline{\frac{s}{a}-\frac{ss}{2aa}+\frac{s^3}{3a^3}-\frac{s^4}{4a^4}+\&c.}$ ſequitur ex natura Log-micæ, has duas ſeries inter ſe æquari, ſi tres applicatæ RE, AB, $\varrho\epsilon$, ſeu, $a-u$, a & $a+s$ continuè proportionentur, h. e. ſi ſtatuatur u ꝏ $\frac{as}{a+s}$; ſed quia per hanc hypotheſin perpetuo fit $u < s$, & nominatim hac ſumta ꝏ a, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. illa fit ꝏ $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}a$, &c. multò ſemper celerius prior ſeries converget poſteriore: unde plurimum laboris in practica effectione log-orum reſcindi poterit, ſi loco hujus illa ſurrogetur, ex. gr. ſi (facta s ꝏ a) loco ſeriei $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\&c.$ hoc eſt, loco $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{7.8}+\&c.$ ſubſtituatur $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.8}+\frac{1}{4.16}+\frac{1}{5.32}+\&c.$ quippe per cujus primos 18. terminos tantundem approximatur, quantum per mille terminos alterius; quod ipſum etiam ad Coroll. 3. XLVII. in ſubtangente Log-micæ definienda obſervabitur. Sed rei utiliſſimæ uberiorem explicationem anguſtia paginæ non permittit.

Schol. Si ſumma quædam pecuniæ fœnori elocata ſit, ea lege, ut ſingulis momentis pars proportionalis uſuræ annuæ in ſortem computetur; exponatur autem ipſa ſors per BC ſeu 1, tempus annuum per BI ſeu x diviſum in punctis E, F, G, &c. in momenta innumera æqualia, atque uſura annua per $\frac{x}{t}$; inventa ſeries $1+\frac{x}{t}+\frac{xx}{1.2tt}+\frac{x^3}{1.2.3t^3}+\&c.$ hoc eſt, (explicata ſorte 1 per a, & uſura $\frac{x}{t}$ per b) $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2.3aa}+\frac{b^4}{2.3.4a^3}+\&c.$ indicabit valorem ejus, quod finito anno debebitur. Cum enim, ut tempus annuum BI ad primum ejus momentum BE ſeu ut x ad d, ita ſe habeat uſura annua $\frac{x}{t}$ ad partem proportionalem uſuræ, erit hæc $\frac{d}{t}$,

ſignifi-

ſignificabitque $1 + \frac{d}{t}$ ſeu applicata EK ſortem dicta parte proportionali uſuræ auctam: unde ſors aucta EK ſecundo momento pariet FL, & hæc pariter tertio momento pariet GM, & ſic porrò, propter BC, EK, FL, GM, &c. $\div\!\!\div$. Quare poſtrema applicata IO, quam ſeries inventa exprimit, denotabit valorem ejus, quod creditori elapſo toto anno debetur. Conf. Act. Lipſ. 1690. p. 222.

LX. *Invenire aream ſpatii comprehenſi à Curva genitrice Elaſtica, ſeu qua evolutione ſui Elaſticam deſcribit.* Fig. 7.

Deſcribatur Elaſtica AQR ex evolutione Curvæ MNT, & ſit filum evolvens QN (DG), quod productum ſecet axem in V; ponaturque, ut ſupra, $RZ \infty a$, $PQ \infty x$, $AP \infty y$. Quoniam ex Act. Lipſ. 1694. p. 273. manifeſtum eſt, quòd $QN \infty \frac{1}{2} QV$, erit & $NH \infty \frac{1}{2} PQ \infty \frac{1}{2} x$, & $NS \infty \frac{1}{2} FQ \infty \frac{1}{2} dx$; ac proinde ob ang. rect. DQN, $DF . FQ$ (:: $dy . dx$ :: [ex natura Elaſticæ] $xx . \sqrt{a^4 - x^4}$) :: $\frac{1}{2} dx (NS) . \frac{dx\sqrt{a^4-x^4}}{2xx} \infty SG$ vel HI. Quare HI in NH ſeu $\square\, NI \infty \frac{xdx\sqrt{a^4-x^4}}{4xx} \infty \frac{a^4x - x^5, dx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}} \infty \frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}} - \frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}} \infty$ Elemento ſpatii $MNHZ$, de cujus ſummatione jam agitur. Poſterioris membri $\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}}$ integrale pertinens ad partem curvæ RQ vel MN eſt $\frac{1}{8}\sqrt{a^4 - x^4}$. Prius autem $\frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}$ cum abſolutè ſummari nequeat, ſublata irrationalitate in ſeriem convertetur, ut ſequitur.

Ponatur $\sqrt{a^4 - x^4} \infty \frac{txx}{a} - aa$, fiet $xx \infty \frac{2a^3t}{aa+tt}$, & differentiando $-xdx \infty \frac{a^3tt - a^5, dt}{Q:aa+tt}$; nec non $\frac{txx}{a} - aa$ ($\sqrt{a^4 - x^4}$) $\infty \frac{aatt - a^4}{aa+tt}$, & denique $\frac{-a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}} \infty \frac{aadt}{8t}$. Jam quia exiſtente maxima $x \infty a$, ipſa quoque $t \infty a$, & illa decreſcente creſcit hæc, ſtatuatur

ſtatuatur $t \infty a+s$, ut ſit $\frac{aadt}{8t} \infty \frac{aads}{8a+8s} \infty \frac{aa}{8}$ in $\frac{ds}{a+s} \infty \frac{aa}{8}$ in $\frac{ds}{a} - \frac{sds}{aa} + \frac{ssds}{a^3} - \frac{s^3ds}{a^4} +$ &c. per XXXVII: unde facta ſummatione habetur $S\frac{aadt}{8t}$ ($\infty\ S\frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}$, diſſimulato nempe ſigno —, quod hîc nota tantum eſt reſpectivi decrementi ipſarum x) $\infty \frac{aa}{8}$ in $\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} +$ &c. demtoque $S\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}} \infty \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$, reſultat $S\frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}} - S\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}} \infty \frac{aa}{8}$ in $\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} +$ &c. $- \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$ ſpatio nempe quæſito *MNHZ*. Et quia, ſumta $u \infty \frac{as}{a+s}$, ſeries $\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} -$ &c. æquatur ſeriei $\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} +$ &c. per Annot. præc. Propoſ. idcirco dictum ſpatium *MNHZ* quoque ſic exprimetur, $\frac{aa}{8}$ in $\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} +$ &c. $- \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$.

Nota, ſi ſtatuantur $aa \infty 8$, & $s \infty a$, adeoque $t\ (a+s) \infty 2a$, & x $\left(\sqrt{\frac{2a^3t}{aa+tt}}\right) \infty 2a\sqrt{\frac{1}{5}}$, & u $\left(\frac{as}{a+s}\right) \infty \frac{1}{2}a$: hoc eſt, ſi conſtructo ſuper *MZ*, ſemiſſe ipſius *RZ*, ſemicirculo inſcribatur Triangulum Iſoſceles *MCZ*, cujus crus *MC* unitatem deſignet, atque Curvæ *MNT* applicetur *NH* ($\frac{1}{2}x$) $\infty \sqrt{\frac{8}{5}}$, prædictum ſpatium *MNHZ* fiet $\infty\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} -$ &c. $- \frac{3}{5}$. vel etiam $\infty \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} +$ &c. $- \frac{3}{5}$. Conf. Act. Lipſ. 1694. p. 273.

Coroll. 1. Quoniam ex iis, quæ loc. modo cit. Actorum docuimus, colligi poteſt, quod $QV \infty \frac{aa}{x}$, & $QX \infty \frac{1}{2}\ QV \infty \frac{aa}{2x}$, &

DQ ſeu $dz \infty \frac{aadx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$; ſequitur, triangulum QGD (QD in $\frac{1}{2}QN$) $\infty \frac{a^4 dx}{4x\sqrt{a^4 - x^4}}$, & per conſequens omnia triangula QGD ſeu ſpatium $RMNQR \infty S \frac{a^4 dx}{4x\sqrt{a^4 - x^4}} \infty$ (ut oſtenſum) ſpatio $MNHZ + S \frac{x^3 dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}}$: unde cum $S \frac{x^3 dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}}$ ſeu $\frac{1}{8}\sqrt{a^4 - x^4}$ exprimat quadrantem ſpatii Elaſtici $PQRZ$ (ut per ſe liquet), concludimus, ſpatium $RMNQR$ excedere aream $MNHZ$ quarta parte ipſius $PQRZ$.

Coroll. 2. Quia differentiale $\frac{aadt}{8t}$, ad quod reduximus elementum ſpatii $MNHZ$ vel $RMNQR$, elementum quoque denotat ſpatii hyperbolici inter aſymptotas, cujus abſciſſa à centro eſt ∞t, ipſa vero t in aſſumta hypotheſi $\sqrt{a^4 - x^4} \infty \frac{txx}{a} - aa$ propter x decreſcentem ad nihilum excreſcat in infinitum, & ſpatium hyperbolicum in infinitum protenſum ſit infinitum; idcirco & ſpatium totum interminatum genitricis Elaſticæ $MNTXZ$ ſeu $NTXH$ infinitum erit. Vid. Act. Lipſ. loc. cit.

UT non-finitam Seriem finita coërcet,
Summula, & in nullo limite limes adeſt:
Sic modico immenſi veſtigia Numinis hærent
Corpore, & anguſto limite limes abeſt.
Cernere in immenſo parvum, dic, quanta voluptas!
In parvo immenſum cernere, quanta, Deum!

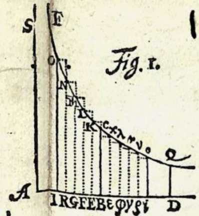


Fig. 1.

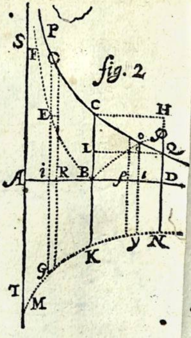


fig. 2

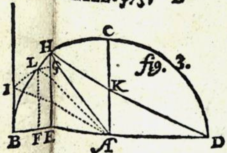


fig. 3.

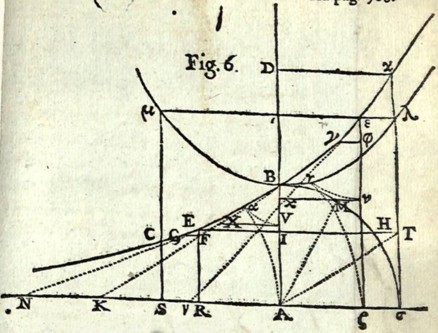


Fig. 6.

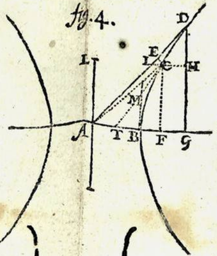


fig. 4.

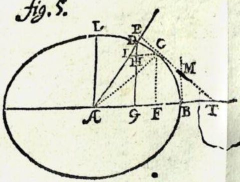


fig. 5.

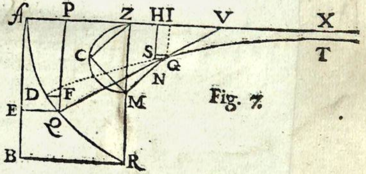


Fig. 7.

00052076

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 09 July, 2016